목록

수학 영역

정답

1	⑤	2	④	3	②	4	③	5	③
6	④	7	④	8	②	9	③	10	⑤
11	④	12	①	13	①	14	⑤	15	②
16	5	17	17	18	13	19	24	20	27
21	117	22	64						

해설

1. [출제의도] 지수와 로그 계산하기

$4^{\frac{1}{2}}+\log_2 8=2+3=5$

2. [출제의도] 정적분 계산하기

$\int_0^1 (2x+3)dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=1+3=4$

3. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=2x-a$
$f'(1)=2-a=0$
따라서 $a=2$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=-1$
따라서 $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=1$

5. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기

양변의 밑을 5로 같게 하면
$5^{2x-7}\le 5^{-x+2}$
$2x-7\le -x+2$에서 $x\le 3$
주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는
1, 2, 3
따라서 자연수 x의 개수는 3

6. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$\cos(-\theta)+\sin(\pi+\theta)=\cos\theta-\sin\theta=\frac{3}{5}$
$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$
$=1-2\sin\theta\cos\theta$
$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$
따라서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{25}$

7. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1=10$이므로
$a_2=5-\frac{10}{10}=4$
$a_3=5-\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$
$a_4=-2\times\frac{5}{2}+3=-2$
$a_5=5-\frac{10}{-2}=5+5=10$
$\vdots$
$a_9=a_5=a_1=10$, $a_{12}=a_8=a_4=-2$
따라서 $a_9+a_{12}=8$

8. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

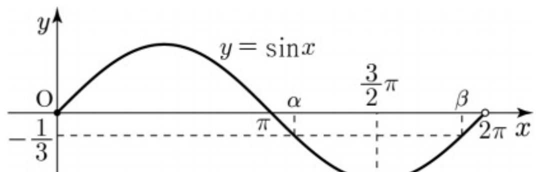
등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$
$2a=S_2+S_3$이므로
$2a=(a+ar)+(a+ar+ar^2)$
$ar(2+r)=0$
$r^2=64a^2\ (a>0)$에 의하여
$r\ne 0$이므로 $r=-2$, $a=\frac{1}{4}$
따라서 $a_5=\frac{1}{4}\times(-2)^4=4$

9. [출제의도] 거듭제곱근과 지수법칙 이해하기

$(\sqrt[n]{a})^3=a^{\frac{3}{n}}$
(ⅰ) $a=4$일 때 $4^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$
$n\ (n\ge 2)$가 6의 양의 약수이어야 하므로
$n=2,\ 3,\ 6$
그러므로 $f(4)=6$
(ⅱ) $a=27$일 때 $27^{\frac{3}{n}}=3^{\frac{9}{n}}$
$n\ (n\ge 2)$가 9의 양의 약수이어야 하므로
$n=3,\ 9$
그러므로 $f(27)=9$
따라서 $f(4)+f(27)=6+9=15$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로
$3(1-\sin^2 x)+5\sin x-1=0$
$3\sin^2 x-5\sin x-2=0$
$(3\sin x+1)(\sin x-2)=0$
$-1\le \sin x\le 1$이므로 $\sin x=-\frac{1}{3}$ ⋯ ㉠



㉠을 만족시키는 x의 값을 $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로 $\alpha+\beta=3\pi$
따라서 모든 해의 합은 3π

11. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제해결하기

직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점이 A이므로
$-2=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2$에서 $x=2$
$\mathrm{A}(2,\ -2)$
$\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\log_a 9-2\right)$, $\mathrm{C}\left(10,\ -\log_a 8+1\right)$이고,
점 A와 직선 $x=10$ 사이의 거리는 8이므로
삼각형 ACB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 8\times\left\{\left(\frac{1}{2}\log_a 9-2\right)-\left(-\log_a 8+1\right)\right\}$
$=4\times(\log_a 24-3)=28$
$\log_a 24=10$
따라서 $a^{10}=24$

12. [출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$이므로
$f(x)=2x^2+ax+b$
함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.
$\lim\limits_{x\to 3} f(x)g(x)=f(3)g(3)$
$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=18+3a+b$에서
(분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0
$\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+ax+b)=0$이므로 $18+3a+b=0$
$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=0$
$b=-3a-18$이므로 $f(x)=(x-3)(2x+a+6)$
$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}$
$=\lim\limits_{x\to 3}(2x+a+6)=0$
이므로 $a=-12$, $b=18$
$f(x)=2x^2-12x+18$
따라서 $f(1)=8$

13. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기

주어진 식 (*)에 의하여
$nS_n=\log_2(n+1)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k\ \ (n\ge 2)$ ⋯ ㉠
이다. (*)에서 ㉠을 빼서 정리하면
$(n+1)S_{n+1}-nS_n$
$=\log_2(n+2)-\log_2(n+1)$
$+\sum\limits_{k=1}^{n}S_k-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k\ \ (n\ge 2)$
이므로
$\boxed{n+1}\times a_{n+1}=\log_2\frac{n+2}{n+1}\ \ (n\ge 2)$
이다.
$a_1=1=\log_2 2$이고,
$2S_2=\log_2 3+S_1=\log_2 3+a_1$이므로
$2a_2=\log_2\frac{3}{2}$
모든 자연수 n에 대하여
$na_n=\boxed{\log_2\frac{n+1}{n}}$
이다. 따라서
$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\log_2\frac{k+1}{k}$
$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\cdots+\log_2\frac{n+1}{n}$
$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$
$=\boxed{\log_2(n+1)}$
이다.
$f(n)=n+1$, $g(n)=\log_2\frac{n+1}{n}$,
$h(n)=\log_2(n+1)$
따라서
$f(8)-g(8)+h(8)=9-\log_2\frac{9}{8}+\log_2 9=12$

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

ㄱ. $v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$
$t<2$일 때 $v(t)<0$
$t=2$일 때 $v(2)=0$
$t>2$일 때 $v(t)>0$
$t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다. (참)
ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(2)=0+\int_0^2(3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_0^2=-4$
(참)

ㄷ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면
$a(t)=6t-6$
$6t-6=12$, $t=3$
$t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_0^3\left|3t^2-6t\right|dt$

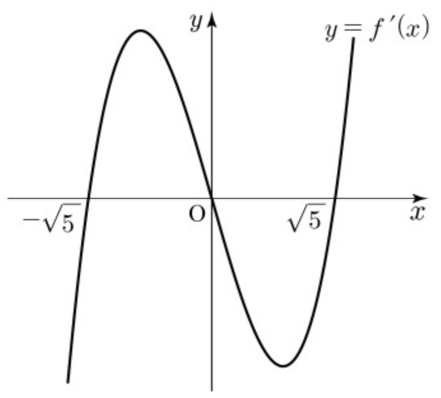
$=-\int_0^2(3t^2-6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$

$=4+\left[t^3-3t^2\right]_2^3=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

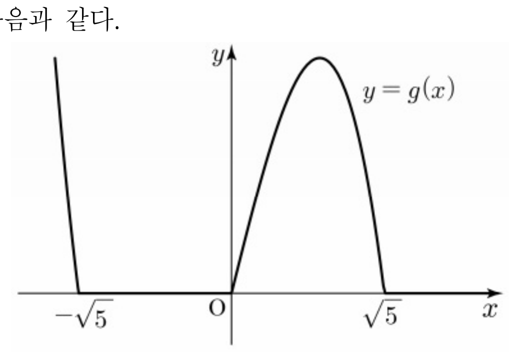
방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근
α, 0, $\beta\,(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta=-\alpha$
$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$
$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)
$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여
$f(0)=9$, $C=9$
조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$
$\alpha=-\sqrt{5}$
함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=\left|f'(x)\right|-f'(x)$이므로
함수

$$g(x)=\begin{cases}0 & (f'(x)\geq 0)\\ -2f'(x) & (f'(x)<0)\end{cases}$$

이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은
다음과 같다.



$\int_0^{10}g(x)dx=-2\int_0^{\sqrt{5}}f'(x)dx$

$=-2\left[f(x)\right]_0^{\sqrt{5}}=-2\{f(\sqrt{5})-f(0)\}$

$=-2\times(-16-9)=50$

16. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+a}{x+1}=b$에서
(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$
$\lim\limits_{x\to-1}(x^2+4x+a)=0$이므로 $1-4+a=0$,
$a=3$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}(x+3)=2=b$

따라서 $a+b=5$

17. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\int(3x^2+6x-4)dx$
$=x^3+3x^2-4x+C$
(단, C는 적분상수이다.)
$f(1)=1+3-4+C=5$, $C=5$
$f(x)=x^3+3x^2-4x+5$
따라서 $f(2)=8+12-8+5=17$

18. [출제의도] 미분계수 이해하기

$f'(x)=3x^2+a$
x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 $f'(a)$의 값과 같으므로

$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(a)$

$\dfrac{3^3+3a-(1^3+a)}{2}=3a^2+a$

따라서 $3a^2=13$

19. [출제의도] 곱의 미분법을 활용하여 문제해결하기

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x^2-4}=2$에서
(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$
$\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(2)=4$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\left\{\dfrac{1}{x+2}\times\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}$

$=\dfrac{1}{4}f'(2)=2$

$f'(2)=8$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)+1}{x-2}=8$에서
(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$
$\lim\limits_{x\to2}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(2)=-1$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=8$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
따라서 $h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=24$

20. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

$\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{CAB}=\alpha$라 하면

$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$이고, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{8}{9}$이므로

$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=18$이고, $\overline{\mathrm{AC}}=6$
점 D는 선분 AB를 $5:4$로 내분하는 점이므로
$\overline{\mathrm{AD}}=10$
삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{DC}}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos\alpha=96$
$\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$
삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면, 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{DC}}}{\sin\alpha}=2R$에서 $R=3\sqrt{3}$

삼각형 CAD의 외접원의 넓이 $S=27\pi$

따라서 $\dfrac{S}{\pi}=27$

21. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 활용하여 문제해결하기

$a_1=a$라 하면
조건 (나)에 의하여
$\{a+(k-1)d\}^2=(a+d)\{a+(3k-2)d\}$
$d(k^2-5k+3)=a(k+1)$ ⋯ ㉠
모든 항이 자연수이므로
조건 (가)에서 $0<a\leq d$
$a(k+1)\leq d(k+1)$
$k^2-5k+3\leq k+1$
$k^2-6k+2\leq0$
$3-\sqrt{7}\leq k\leq3+\sqrt{7}$
$k\geq3$이므로 자연수 $k=3$, 4, 5
㉠에서 $k^2-5k+3>0$이므로 $k=5$, $d=2a$
$90\leq a_{16}\leq100$, $a_{16}=a+15d=31a$
이므로 $a=3$, $d=6$
따라서 $a_{20}=a+19d=117$

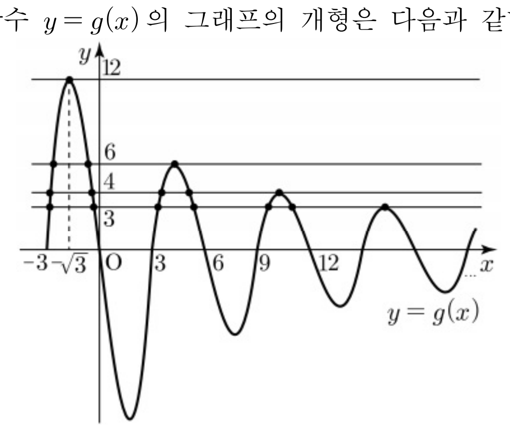
22. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$

$f'(x)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이므로
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	⋯	$-\sqrt{3}$	⋯	$\sqrt{3}$	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	12 (극대)	↘	−12 (극소)	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k에 대하여
$6k-3\leq x<6k+3$일 때

함수 $g(x)=\dfrac{1}{k+1}f(x-6k)$

$k+1$이 12의 양의 약수가 될 때
함수 $g(x)$의 극댓값이 자연수이므로
$k=1$, 2, 3, 5, 11일 때
함수 $g(x)$의 극댓값은
각각 6, 4, 3, 2, 1이다.
$a_1=2\times11+1=23$
$a_2=2\times5+1=11$
$a_3=2\times3+1=7$
$a_4=2\times2+1=5$
$a_5=2\times2=4$
$a_6=2\times1+1=3$
$7\leq n\leq11$일 때 $a_n=2\times1=2$
$a_{12}=1$
따라서

$\sum\limits_{n=1}^{12}a_n=23+11+7+5+4+3+2\times5+1=64$

정답 및 해설

확률과 통계 정답

23	⑤	24	③	25	②	26	①	27	④
28	⑤	29	25	30	51				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 확률 계산하기

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{11}{12}=\dfrac{1}{12}+\mathrm{P}(B)$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{6}$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

전개식의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r(2x)^{7-r}\times 1^r={}_7\mathrm{C}_r\,2^{7-r}x^{7-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$

$x^{7-r}=x^2$에서 $r=5$

따라서 x^2의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_5\times 2^2=84$

25. [출제의도] 확률분포 이해하기

주어진 확률분포표에서

$a+\dfrac{1}{2}a+\dfrac{3}{2}a=3a=1$

$a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{E}(X)=(-1)\times a+0\times\dfrac{1}{2}a+1\times\dfrac{3}{2}a$

$=\dfrac{1}{2}a=\dfrac{1}{6}$

26. [출제의도] 확률의 뜻 이해하기

$(a-2)^2+(b-3)^2+(c-4)^2=2$를

만족시키려면

세 수 $(a-2)^2$, $(b-3)^2$, $(c-4)^2$ 중

한 개의 수가 0이고 두 개의 수가 1이어야 한다.

$(a-2)^2=0$, $(b-3)^2=0$, $(c-4)^2=0$이

될 확률은 각각 $\dfrac{1}{6}$

$(a-2)^2=1$, $(b-3)^2=1$, $(c-4)^2=1$이

될 확률은 각각 $\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은 ${}_3\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수 추론하기

3개의 문자 A, B, C를 같은 문자 X라 하고

6개의 문자를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로

나열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{3!}=6\times5\times4=120$

가운데 문자 X에 문자 A를 놓고

첫 번째 문자 X와 세 번째 문자 X에

두 문자 B, C를 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times2=240$

28. [출제의도] 정규분포의 성질 이해하기

조건 (가)에서 $Y=3X-a$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X-a)=3\mathrm{E}(X)-a=3m-a$

$m=3m-a$에서 $a=2m$

$\sigma(Y)=\sigma(3X-a)=3\sigma(X)=6$

$\mathrm{P}(X\le 4)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{4-m}{2}\right)$

$\mathrm{P}(Y\ge a)=\mathrm{P}(Y\ge 2m)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{m}{6}\right)$

조건 (나)에 의하여

$\dfrac{4-m}{2}=-\dfrac{m}{6}$에서 $m=6$

그러므로 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 6^2)$을

따른다.

따라서

$\mathrm{P}(Y\ge 9)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{9-6}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

29. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기

두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3 이하인

사건을 X, 두 수의 합이 짝수인 사건을 Y라

하자. 사건 X를 만족시키는 경우는 두 수 중

하나가 1이거나 두 수가 같은 소수일 때이다.

(ⅰ) 두 수 중 하나가 1일 때

$\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_{14}\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{15}$

(ⅱ) 두 수가 같은 소수일 때

(1) 두 수가 2일 때

$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{105}$

(2) 두 수가 3일 때

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{35}$

(3) 두 수가 5일 때

$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{21}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\mathrm{P}(X)=\dfrac{4}{15}$

두 사건 X와 Y를 동시에 만족시키는 경우는

(ⅰ)에서 두 수가 1, 3이거나 두 수가 1, 5인

경우 또는 (ⅱ)인 경우이므로

$\mathrm{P}(X\cap Y)$

$=\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_1\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}$

$=\dfrac{22}{105}$

$\mathrm{P}(Y|X)=\dfrac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\dfrac{11}{14}$

따라서 $p+q=25$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

학생 A가 받는 검은 공의 개수와 흰 공의

개수를 각각 b, w라 하자.

조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ w)$ 중

학생 A가 홀수 개의 공을 받는 경우는

$(4,\ 3)$, $(4,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(2,\ 1)$

(ⅰ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(4,\ 3)$일 때

흰 공 2개, 빨간 공 5개가 남으므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(4,\ 1)$일 때

흰 공 4개와 빨간 공 5개가 남으므로

세 명의 학생 B, C, D에게 흰 공과 빨간

공을 각각 1개씩 나누어 주고

남은 흰 공 1개, 빨간 공 2개를 나누어

주는 경우의 수는 다음과 같다.

흰 공 1개를 받는 학생을 정하는

경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

세 명의 학생 B, C, D에게 빨간 공 2개를

나누어 줄 때, 흰 공을 받는 학생에게

빨간 공 2개를 모두 나누어 주는 경우를

제외해야 하므로 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2-1={}_4\mathrm{C}_2-1=5$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times5=15$

(ⅲ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(3,\ 2)$일 때

검은 공 1개, 흰 공 3개, 빨간 공 5개가

남으므로 다음의 (1)과 (2)의 경우로 나누어

볼 수 있다.

(1) 세 명의 학생 B, C, D 중에서 한 명의

학생이 검은 공과 흰 공을 받는 경우

검은 공과 흰 공을 받는 학생을 정하는

경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

검은 공과 흰 공을 받는 학생이 B일 때

남은 흰 공 2개와 빨간 공 5개는

학생 B를 제외한 두 명의 학생 C, D에게

나누어 준다.

두 명의 학생 C, D에게 흰 공 1개,

빨간 공 1개씩을 각각 나누어 주고 남은

빨간 공 3개를 나누어 줄 때,

한 명의 학생에게 빨간 공 3개를 모두

나누어 주는 경우를 제외해야 하므로

경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_3-2={}_4\mathrm{C}_3-2=2$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times2=6$

(2) 세 명의 학생 B, C, D 중에서 한 명의

학생이 검은 공과 빨간 공을 받는 경우

검은 공과 빨간 공을 받는 학생을 정하는

경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

검은 공과 빨간 공을 받는 학생이 B일 때

두 명의 학생 C, D에게 흰 공 1개,

빨간 공 1개씩을 각각 나누어 준다.

남은 흰 공 1개, 빨간 공 2개에 대하여

흰 공은 학생 B를 제외한 두 명의 학생

C, D 중에서 한 명을 택하여 나누어 주고,

빨간 공은 세 명의 학생 B, C, D 중에서

한 명을 택하여 나누어 준다.

이 때, 마지막에 흰 공을 받는 학생에게

빨간 공 2개를 모두 나누어 주는 경우를

제외해야 하므로 경우의 수는

$2\times({}_3\mathrm{H}_2-1)=2\times({}_4\mathrm{C}_2-1)=10$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times10=30$

(ⅳ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(2,\ 1)$일 때

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여

구하는 경우의 수는 $15+6+30=51$

미적분 정답

23	①	24	⑤	25	④	26	③	27	①
28	②	29	15	30	586				

미적분 해설

23. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 에서 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

24. [출제의도] 치환적분 이해하기

$\sin 2x=t$ 라 하면

$2\cos 2x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때 $t=1$ 이다.

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2x\sin^2 2x\,dx=\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

(i) $1\le r<3$ 일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{r}{3}\right)^n=0$ 이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+r^{n+1}}{3^n+7\times r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+r\times\left(\frac{r}{3}\right)^n}{1+7\times\left(\frac{r}{3}\right)^n}=1$$

이므로 r 는 1, 2

(ii) $r=3$ 일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+3^{n+1}}{3^n+7\times 3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\times 3^n}{8\times 3^n}=\dfrac{1}{2}$ 이므로

주어진 식은 성립하지 않는다.

(iii) $r>3$ 일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{r}\right)^n=0$ 이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+r^{n+1}}{3^n+7\times r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{r}\right)^n+r}{\left(\frac{3}{r}\right)^n+7}=\frac{r}{7}=1$$

이므로 r 는 7

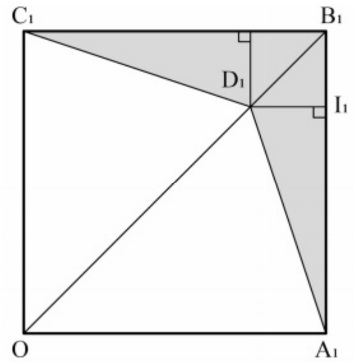
(i), (ii), (iii)에 의하여

주어진 식이 성립하도록 하는 자연수 r 는

1, 2, 7

따라서 모든 r 의 값의 합은 $1+2+7=10$

26. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기



$\overline{OB_1}=4\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{D_1B_1}=\sqrt{2}$

점 D_1 에서 직선 A_1B_1 에 내린 수선의 발을 I_1 이라 하면 $\overline{D_1I_1}=1$

두 삼각형 $A_1B_1D_1$, $B_1C_1D_1$ 의 넓이는 모두 2 이므로 $S_1=4$

네 선분 A_nB_n, B_nC_n, C_nD_n, D_nA_n 으로 둘러싸인 ㄱ 모양의 도형의 넓이를 T_n 이라 하자.

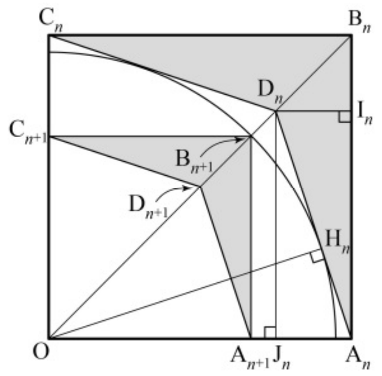


그림 R_n 에서 중심이 O 이고

두 직선 A_nD_n, C_nD_n에 동시에 접하는 원과 직선 A_nD_n 이 접하는 점을 H_n 이라 하고,

점 D_n 에서 두 직선 A_nB_n, OA_n 에 내린 수선의 발을 각각 I_n, J_n 이라 하자.

$\overline{A_nI_n}=\overline{D_nJ_n}=\dfrac{3}{4}\overline{OA_n}$, $\overline{D_nI_n}=\dfrac{1}{4}\overline{OA_n}$ 이므로

$\overline{A_nD_n}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}\overline{OA_n}$

삼각형 OA_nD_n 에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{A_nD_n}\times\overline{OH_n}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times\overline{D_nJ_n}$

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}\overline{OA_n}\times\overline{OH_n}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times\dfrac{3}{4}\overline{OA_n}$

$\overline{OH_n}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\overline{OA_n}$

$\overline{OA_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{OB_{n+1}}$

$\qquad=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{OH_n}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\overline{OA_n}$

두 정사각형 $OA_nB_nC_n$ 과 $OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 의 닮음비는

$\overline{OA_n}:\overline{OA_{n+1}}=1:\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

$T_n:T_{n+1}=1:\dfrac{9}{20}$

$T_{n+1}=\dfrac{9}{20}T_n$

그러므로 수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1=S_1=4$ 이고

공비가 $\dfrac{9}{20}$ 인 등비수열이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n=\dfrac{4}{1-\dfrac{9}{20}}=\dfrac{80}{11}$

27. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

함수 $f(x)=xe^{-2x}$ 이라 하면

$f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$

$f''(x)=(4x-4)e^{-2x}=0$ 에서 $x=1$

$x<1$ 에서 $f''(x)<0$ 이고,

$x>1$ 에서 $f''(x)>0$ 이다.

$x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

변곡점 A 의 좌표는 $(1,\ e^{-2})$

$f'(1)=-e^{-2}$ 이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A 에서의 접선의 방정식은

$y-e^{-2}=-e^{-2}(x-1)$

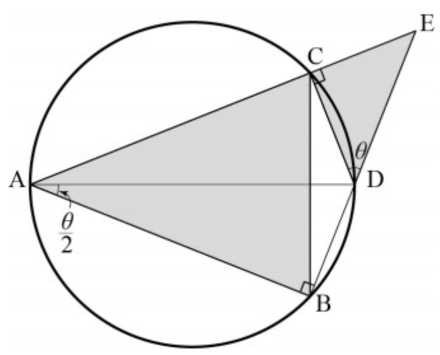
$y=-e^{-2}(x-2)$

그러므로 점 B 의 좌표는 (2, 0)

따라서 삼각형 OAB 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\times e^{-2}=e^{-2}$

28. [출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기



$\angle ABD=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 선분 AD 는 원의 지름이다.

$\angle ECD=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle DAB=\angle CAD=\dfrac{\theta}{2}$

$\overline{AB}=10\cos\dfrac{\theta}{2}$, $\overline{CD}=\overline{BD}=10\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\angle AEB=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ 이므로 $\angle CDE=\theta$

$\overline{CE}=10\sin\dfrac{\theta}{2}\tan\theta$

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\left(10\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta$

$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times 10\sin\dfrac{\theta}{2}\times 10\sin\dfrac{\theta}{2}\tan\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{50\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times50\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^2\times\sin\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{1\times\frac{1}{4}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\right\}=\frac{1}{4}$$

29. [출제의도] 역함수의 미분법을 활용하여 문제해결하기

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속함수이다.

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$h(0)=\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0+}h(x)$에서

$h(0)=0$이고 $f(g^{-1}(0))=0$

$g^{-1}(0)=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$

$f(\alpha)=0$에서

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=1$ … ㉠

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$h(1)=\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)$에서

$h(1)=0$이고 $f(g^{-1}(1))=0$

$g(0)=1$이므로 $g^{-1}(1)=0$이고 $f(0)=0$이므로

$f(g^{-1}(1))=0$은 성립한다.

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$에서

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(g^{-1}(x))}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x}=1$$

$f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0)=1$

$g^{-1}(0)=\alpha$이고 $(g^{-1})'(0)=\frac{1}{g'(\alpha)}$이므로

$f'(\alpha)\times\frac{1}{g'(\alpha)}=1$

$f'(\alpha)=g'(\alpha)$

$3\alpha^2-1=3a\alpha^2+2\alpha+b$ … ㉡

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$에서

$$\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(g^{-1}(x))}{x-1}$$

$\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}$에서 $x-1=t$라 하면

$$\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\pi}\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to0-}\frac{-\sin\pi t}{\pi t}=-1$$

$\lim_{x\to1+}\frac{f(g^{-1}(x))}{x-1}=-1$에서

$f'(g^{-1}(1))(g^{-1})'(1)=-1$

$g^{-1}(1)=0$이고 $(g^{-1})'(1)=\frac{1}{g'(0)}$이므로

$f'(0)\times\frac{1}{g'(0)}=-1$

$f'(0)=-1$이므로

$g'(0)=b=1$

삼차함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 가지고 $g'(0)=1>0$이므로 증가함수이다.

$g(\alpha)=0$, $g(0)=1$이므로 $\alpha<0$

㉠에 의하여 $\alpha=-1$

㉡에 의하여 $a=1$

$g(x)=x^3+x^2+x+1$

따라서 $g(a+b)=g(2)=15$

30. [출제의도] 적분법을 활용하여 문제해결하기

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{10}f'(x)$$

$$=\frac{f'(x)}{10f(x)}\{10-f(x)\}$$

$g'(x)=0$이 되려면 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=10$

$f'(x)=2ax$이므로 $x=0$일 때에만 $f'(x)=0$

(i) 방정식 $f(x)-10=0$이 실근을 갖지 않을 때, $f'(0)=0$, $f(x)>10$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘

(ii) 방정식 $f(x)-10=0$이 중근을 가질 때, $f'(0)=0$, $f(0)=10$, $f(x)\geq10$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘

(i), (ii)의 경우에는 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) 방정식 $f(x)-10=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때,

방정식 $f(x)-10=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha=-\beta$

$f(-x)=f(x)$이므로 $g(-x)=g(x)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로

$g(\alpha)=g(\beta)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

(iii)의 경우에는 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$f(0)=b<f(\alpha)=10$이므로

$1\leq b<10$

$$g(0)=\ln f(0)-\frac{1}{10}(f(0)-1)$$

$$=\ln b-\frac{1}{10}(b-1)$$

$p(x)=\ln x-\frac{1}{10}(x-1)$이라 하면

$p'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{10}=\frac{10-x}{10x}$

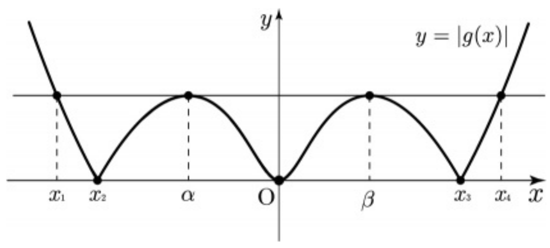
$1\leq x<10$일 때 $p'(x)>0$이므로

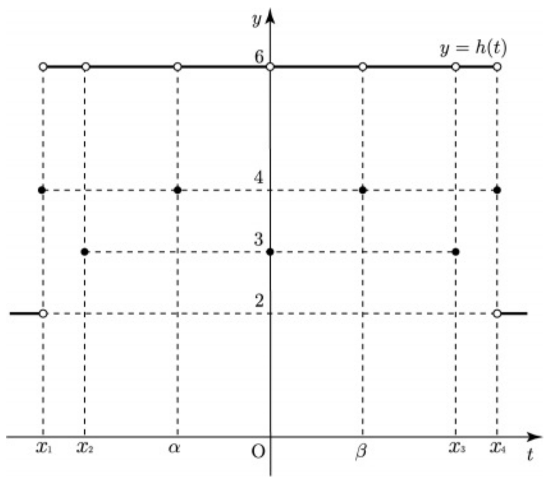
$p(x)$는 증가함수이다.

$g(0)\geq p(1)=0$

함수 $|g(x)|$의 그래프의 개형은 다음 2가지 경우와 같다.

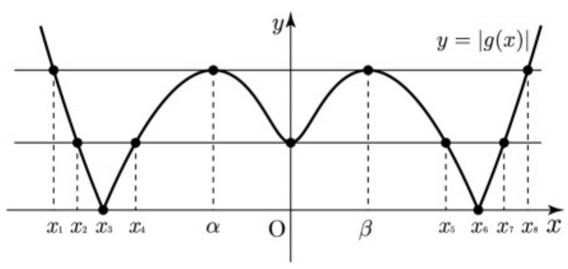
(1) $g(0)=0$일 때

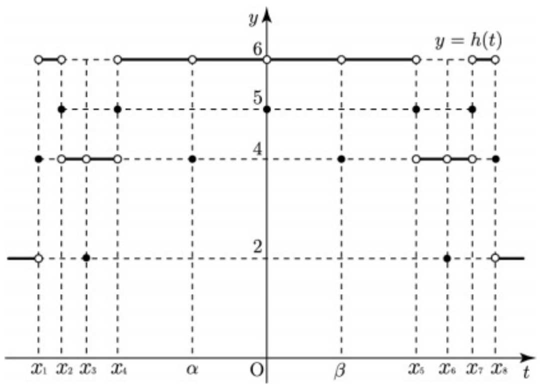




함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 값의 개수는 7이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(2) $g(0)>0$일 때





함수 $h(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 k 의 값의 개수는 11 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(0)=0$

$0=g(0)=p(b)\geq p(1)=0$ 이므로

$p(b)=p(1)$

함수 $p(x)$ 는 $1\leq x<10$ 에서

증가함수이므로 $b=1$, $f(x)=ax^2+1$

$$\int_0^a e^x f(x)dx$$

$$=\int_0^a (ax^2+1)e^x dx$$

$$=\left[(ax^2+1)e^x\right]_0^a-\int_0^a 2ax\,e^x dx$$

$$=(a^3+1)e^a-1-\left[2ax\,e^x\right]_0^a+\int_0^a 2ae^x dx$$

$$=(a^3+1)e^a-1-2a^2e^a+\left[2ae^x\right]_0^a$$

$$=(a^3-2a^2+2a+1)e^a-2a-1$$

$$me^a-19=(a^3-2a^2+2a+1)e^a-2a-1$$

따라서 $a=9$ 이므로

$$m=a^3-2a^2+2a+1=586$$

기하 정답

23	④	*24*	②	*25*	⑤	*26*	①	*27*	⑤
28	③	*29*	25	*30*	108				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 평행 계산하기

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면
$(2,\ 4)=t(-1,\ k)$를 만족시키는 실수 $t\ (t\neq 0)$가 존재한다.
그러므로 $2=-t$, $4=kt$
따라서 $k=-2$

24. [출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식 이해하기

쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은
$ax-by=1$
기울기가 2이므로 $\dfrac{a}{b}=2$, $a=2b$
점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점이므로
$4b^2-b^2=1$
$3b^2=1$이고 b가 양수이므로 $b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$a=2b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
따라서 $ab=\dfrac{2}{3}$

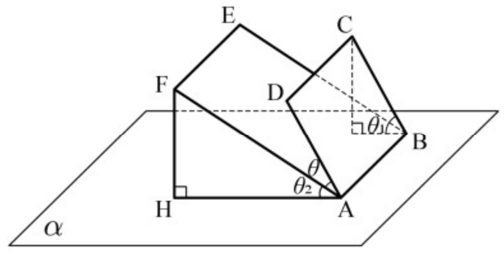
25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면
$\dfrac{a-5}{2}=b-5$ … ㉠
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a-2,\ b-6)$
직선 l의 방향벡터는 $\vec{u}=(2,\ 1)$
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\vec{u}$는 서로 수직이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{u}=0$
$2(a-2)+(b-6)=0$
$b=-2a+10$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a=3$, $b=4$
따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

26. [출제의도] 타원의 성질 이해하기

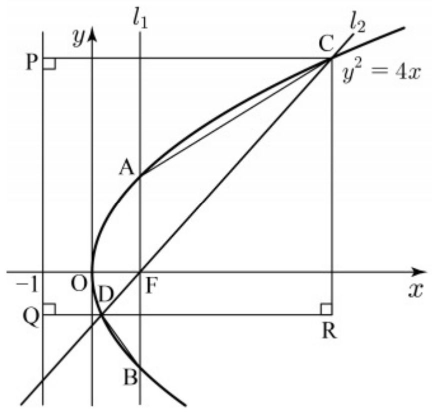
직선 $\mathrm{F'Q}$와 직선 FP가 만나는 점을 R라 하자.
직선 $\mathrm{F'Q}$가 선분 FP를 수직이등분하므로
$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{FR}}=\sqrt{3}$
삼각형 $\mathrm{FRF'}$에서
$\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{7}$, $\overline{\mathrm{FR}}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{F'R}}=5$
장축의 길이가 8이므로
$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{F'R}}+\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QF}}=8$
$\overline{\mathrm{FQ}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{RQ}}=3-a$
삼각형 FQR에서
$a^2=(3-a)^2+(\sqrt{3})^2$, $a=2$
따라서 선분 FQ의 길이는 2

27. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여 추론하기



정사각형 ABCD의 넓이는 36
정사각형 ABCD의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 18이므로 두 평면 ABCD와 α가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 하면
$36\times\cos\theta_1=18$이므로 $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$
점 F의 평면 α 위로의 정사영이 H이므로
두 평면 ABEF와 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 하면
$\cos\theta_2=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$
두 평면 ABCD와 ABEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\theta=\theta_1-\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$
따라서 정사각형 ABCD의 평면 ABEF 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면
$S'=36\times\cos\dfrac{\pi}{6}=18\sqrt{3}$

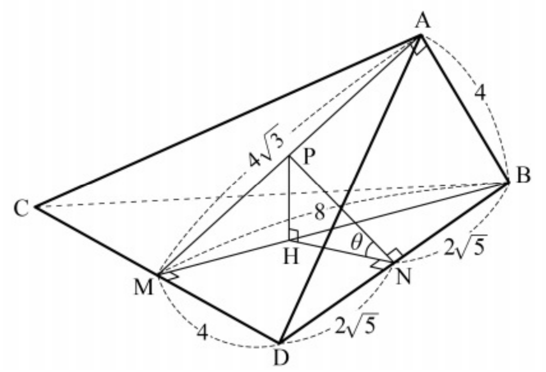
28. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기



$\angle\mathrm{AFC}=\angle\mathrm{DFB}$이고 $\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{FB}}$이다.
삼각형 FCA의 넓이가 삼각형 FDB의 넓이의 5배이므로
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FA}}\times\overline{\mathrm{FC}}\times\sin(\angle\mathrm{AFC})$
$=5\times\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FB}}\times\overline{\mathrm{FD}}\times\sin(\angle\mathrm{DFB})$
$\overline{\mathrm{FC}}=5\overline{\mathrm{FD}}$
두 점 C, D에서 이 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고,
점 C를 지나고 x축에 수직인 직선과 직선 QD가 만나는 점을 R라 하자.
$\overline{\mathrm{FD}}=s$라 하면 $\overline{\mathrm{QD}}=\overline{\mathrm{FD}}=s$
$\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{FC}}=5s$
$\overline{\mathrm{DR}}=\overline{\mathrm{QR}}-\overline{\mathrm{QD}}=4s$, $\overline{\mathrm{CD}}=6s$에서
$\overline{\mathrm{CR}}=2\sqrt{5}s$
따라서 $m=\dfrac{\overline{\mathrm{CR}}}{\overline{\mathrm{DR}}}=\dfrac{2\sqrt{5}s}{4s}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

29. [출제의도] 공간도형을 활용하여 문제해결하기

$\angle\mathrm{BMD}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BM}}=8$
$\angle\mathrm{BAM}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=4\sqrt{3}$



점 P에서 직선 BM에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{BM}}$ … ㉠
직선 AB와 평면 ACD가 서로 수직이므로
$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$
직선 CD는 두 직선 AB, BM과 서로 수직이므로
$\overline{\mathrm{CD}}\perp$(평면 AMB)
직선 PH는 평면 AMB에 포함되므로
$\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}\perp$(평면 CDB)
$\overline{\mathrm{PH}}\perp$(평면 CDB)이고 $\overline{\mathrm{PN}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HN}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$
두 삼각형 DBM과 HBN은 서로 닮은 도형이므로 $\overline{\mathrm{BM}}:\overline{\mathrm{MD}}=\overline{\mathrm{BN}}:\overline{\mathrm{NH}}$에서
$\overline{\mathrm{NH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{MD}}\times\overline{\mathrm{BN}}}{\overline{\mathrm{BM}}}=\sqrt{5}$
$\angle\mathrm{BNH}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BH}}^2=\overline{\mathrm{BN}}^2+\overline{\mathrm{NH}}^2=25$
$\overline{\mathrm{BH}}=5$, $\overline{\mathrm{MH}}=3$
$\tan(\angle\mathrm{AMB})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{3}$
$\overline{\mathrm{PN}}^2=\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HN}}^2=8$
$\overline{\mathrm{PN}}=2\sqrt{2}$
두 평면 PDB, CDB의 교선은 직선 DB이고 평면 PDB 위의 점 P의 평면 CDB 위로의 정사영이 H이므로
$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{HN}}}{\overline{\mathrm{PN}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$
따라서 $40\cos^2\theta=25$

30. [출제의도] 평면벡터의 내적의 성질을 활용하여 문제해결하기

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 E라 하자.

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EP})$

$= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{EP}$

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE}$의 값은 일정하므로

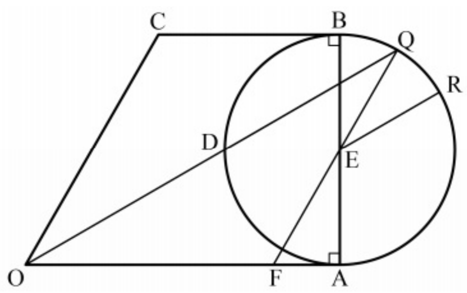
$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{EP}$의 값이 최대일 때

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{EP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때의 점 P가 Q이다.



직선 QE가 선분 OA와 만나는 점을 F라 하자.

$\angle \mathrm{EFA} = \frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{AE}} = 2$이므로

$\overline{\mathrm{FE}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\overline{\mathrm{FA}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{OA}} - \overline{\mathrm{FA}} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{FQ}} = \overline{\mathrm{FE}} + \overline{\mathrm{EQ}} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{FQ}}$이므로 $\angle \mathrm{OQF} = \frac{\pi}{6}$

그러므로 $\overline{\mathrm{DQ}} = 2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{DQ} \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ER})$

$= \overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{ER}$ ⋯ ㉠

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{AE} = 2\sqrt{3} \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{ER}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{ER}$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{ER} \le 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3}$

㉠에 의하여

$\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{ER}$

$\le 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

따라서 $M = 6\sqrt{3}$이므로 $M^2 = 108$