

● 수학 영역 ●

수학 정답

1	②	2	①	3	④	4	①	5	②
6	⑤	7	⑤	8	④	9	③	10	⑤
11	④	12	③	13	③	14	①	15	②
16	10	17	6	18	9	19	162	20	8
21	15	22	16						

해설

1. [출제의도] 로그의 값을 계산한다.

$$\log_8 16 = \log_2 2^4 = \frac{4}{3} \log_2 2 = \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$$

2. [출제의도] 등차수열의 첫째항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\text{그러므로 } a_4 = a_1 + (4-1) \times 3 = a_1 + 9$$

$$\text{즉, } a_1 + 9 = 100$$

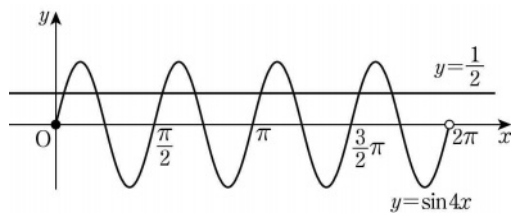
$$\text{따라서 } a_1 = 91$$

3. [출제의도] 삼각함수의 주기를 이해하여 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구한다.

$$y = \sin 4x \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2} \text{이다.}$$

좌표평면에 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 $0 \leq x < 2\pi$ 의 범위에서

함수 $y = \sin 4x$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 구하는 서로 다른 실근의 개수는 8

4. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_2^{-2} (x^3 + 3x^2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_2^{-2}$$

$$= (4-8) - (4+8)$$

$$= -16$$

5. [출제의도] 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2 + 3 = 5$$

6. [출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + ax + b}{x-3} \text{의 값이 존재하고, } x \rightarrow 3^- \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로}$$

$$9 + 3a + b = 0, \quad b = -3a - 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + ax - 3a - 9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+3+a)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3+a)$$

$$= 6+a$$

$$\text{한편, } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 7$$

$$\text{그러므로 } 6+a=7$$

$$\text{따라서 } a=1, \quad b=-12 \text{이므로 } a-b=13$$

7. [출제의도] Σ 의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

자연수 k 에 대하여

$$n=2k-1 \text{일 때, } a_n = a_{2k-1} = \frac{\{(2k-1)+1\}^2}{2} = 2k^2$$

$$n=2k \text{일 때, } a_n = a_{2k} = \frac{(2k)^2}{2} + 2k + 1 = 2k^2 + 2k + 1$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} + \sum_{k=1}^5 a_{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^5 2k^2 + \sum_{k=1}^5 (2k^2 + 2k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^5 \{2k^2 + (2k^2 + 2k + 1)\}$$

$$= \sum_{k=1}^5 (4k^2 + 2k + 1)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^5 k^2 + 2 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 1$$

$$= 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} + 1 \times 5$$

$$= 255$$

8. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 방정식에 대한 문제를 해결한다.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ 라 하면

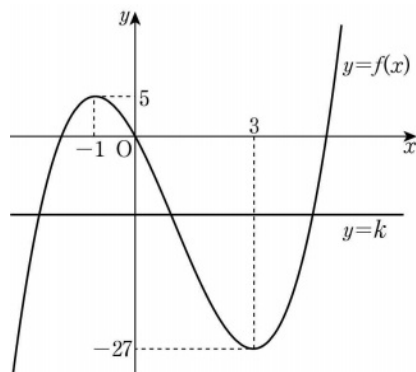
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	5	\searrow	-27	\nearrow

이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



직선 $y=k$ 는 x 축에 평행하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는 $-27 < k < 5$

그러므로 정수 k 의 최댓값 $M=4$, 최솟값 $m=-26$

$$\text{따라서 } M-m = 4 - (-26) = 30$$

9. [출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

구하고자 하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_0^2 \{g(x) - f(x)\} dx$$

$g(x) - f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3이고

삼차방정식 $g(x) - f(x) = 0$ 은 한 실근 0과 중근 2를 가지므로 $g(x) - f(x) = 3x(x-2)^2$

$$\text{따라서 } S = \int_0^2 3x(x-2)^2 dx$$

$$= \int_0^2 (3x^3 - 12x^2 + 12x) dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2 \right]_0^2$$

$$= 12 - 32 + 24 = 4$$

10. [출제의도] 수열의 합을 구하는 과정을 추론한다.

점 $A_n(n, n^2)$ 을 지나고 직선 $y=nx$ 에 수직인 직선의

기울기는 $-\frac{1}{n}$ 이므로 직선의 방정식은

$$y - n^2 = -\frac{1}{n}(x - n), \quad y = -\frac{1}{n}x + n^2 + 1$$

$$\text{즉, } \textcircled{\text{가}} = -\frac{1}{n}$$

점 B_n 의 좌표는 $-\frac{1}{n}x + n^2 + 1 = 0$ 에서 $(n^3 + n, 0)$

점 A_n 의 좌표는 (n, n^2) 이므로

$$S_n = \frac{1}{2} \times (n^3 + n) \times n^2 = \frac{n^5 + n^3}{2}$$

$$\text{즉, } \textcircled{\text{나}} = \frac{n^5 + n^3}{2}$$

$$\sum_{n=1}^8 \frac{S_n}{n^3} = \sum_{n=1}^8 \frac{n^5 + n^3}{2n^3} = \sum_{n=1}^8 \frac{n^2 + 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 1$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} + \frac{1}{2} \times 1 \times 8$$

$$= 102 + 4 = \textcircled{\text{106}}$$

$$\text{즉, } \textcircled{\text{다}} = 106$$

따라서 $f(n) = -\frac{1}{n}$, $g(n) = \frac{n^5 + n^3}{2}$, $r = 106$ 이므로

$$f(1) + g(2) + r = -1 + 20 + 106 = 125$$

11. [출제의도] 부채꼴의 넓이를 이용하여 문제를 해결한다.

원 O 에서 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$ 인 부채꼴 AOB 의

넓이를 T_1 , 원 O 에서 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$ 인 부채

꼴 AOB 의 넓이를 T_2 라 하면,

$$S_1 = T_1 + S_2 - T_2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{7}{6}\pi \right) + S_2 - \left(\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{5}{6}\pi \right)$$

$$= \frac{3}{2}\pi + S_2$$

$$\text{따라서 } S_1 - S_2 = \frac{3}{2}\pi$$

12. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $f(1) = g(1)$ ㉠

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x) - f(1)\} - \{g(x) - g(1)\}}{x-1} = 5$$

즉, $f'(1) - g'(1) = 5$ ㉡

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x) - f(1)\} + \{g(x) - g(1)\}}{x-1} = 7$$

즉, $f'(1) + g'(1) = 7$ ㉢

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x-1} = b \times g(1) \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때,}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } a = f(1) \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

㉠에서 $f(1) = g(1)$ 이므로 $f'(1) = b \times f(1) = ab$

㉡, ㉢을 연립해서 풀면 $f'(1) = 6$

따라서 $ab = 6$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

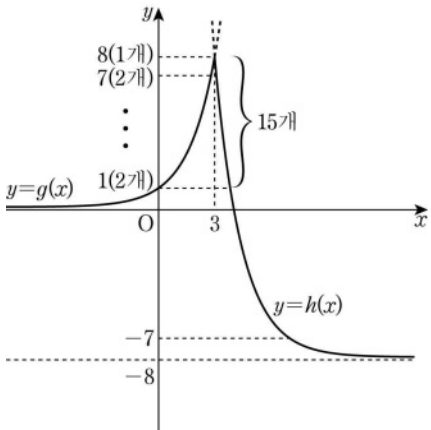
$$g(x) = 2^x, \quad h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 \text{이라 하면}$$

곡선 $y = g(x)$ 의 점근선의 방정식은 $y = 0$ 이고,

곡선 $y = h(x)$ 의 점근선의 방정식은

$$y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 \text{이다.}$$

그러므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수가 23이므로 $y \leq 0$ 에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는 8이다.

곡선 $y=h(x)$ 의 점근선이 $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8$ 이므로 $-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8$ 은 -8 이상 -7 미만이어야 한다.

$$\text{즉, } -8 \leq -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 < -7,$$

$$15 < \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} \leq 16, \quad 4 < 15 < 4^{-3-a} \leq 4^2,$$

$$1 < -3-a \leq 2, \quad -5 \leq a < -4$$

따라서 구하는 정수 a 의 값은 -5

14. [출제의도] 미분의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $f(0)=0$ 이고 $g(0)=0$ 이므로 $g(x)=f(x)+|f'(x)|$ 에서 $f'(0)=0$
 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b 는 상수)로 놓으면 $f'(x)=(x^2+ax+b)+x(2x+a)$ 에서 $f'(0)=b=0$
 그러므로 $f(x)=x^2(x+a)$, $f'(x)=x(3x+2a)$

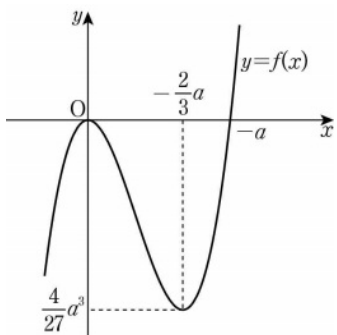
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{2}{3}a$$

조건 (나)에서 $-a > 0$ 이므로 $-\frac{2}{3}a > 0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	0	...	$-\frac{2}{3}a$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$\frac{4}{27}a^3$	↗

이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (다)에서 $\left|f\left(-\frac{2}{3}a\right)\right|=4$ 이므로

$$f\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{27}a^3 = -4 \text{ 이고 } a^3 = -27 \text{에서 } a = -3$$

그러므로 $f(x) = x^2(x-3)$ 이고

$$g(x) = x^2(x-3) + |3x(x-2)|$$

따라서 $g(3) = 9$

15. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 도형의 성질을 추론한다.

$\angle ABC = \theta$ 라 하자.

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos \theta$$

$$\text{이므로 } \overline{AC}^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \frac{1}{8} = 36$$

그러므로 $\overline{AC} = 6$ (참)

ㄴ. 호 EA에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$$\angle ACE = \angle ABE$$

호 CE에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$$\angle EAC = \angle EBC$$

한편, $\angle ABE = \angle EBC$ 이므로 $\angle ACE = \angle EAC$

그러므로 삼각형 EAC는 $\overline{EA} = \overline{EC}$ 인 이등변삼각형이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ABD에서 $\angle ADE = \angle DAB + \angle ABD$

한편, $\angle DAB = \angle CAD$, $\angle ABD = \angle EBC$

그러므로 $\angle ADE = \angle CAD + \angle EBC$

$$= \angle CAD + \angle EAC$$

$$= \angle EAD$$

즉, 삼각형 EAD는 $\overline{EA} = \overline{ED}$ 인 이등변삼각형이다. 삼각형 EAC에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{AC}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{EC}^2 - 2 \times \overline{EA} \times \overline{EC} \times \cos(\pi - \theta) \text{ 이고}$$

ㄴ에서 $\overline{EA} = \overline{EC}$ 이므로

$$36 = 2 \times \overline{EA}^2 - 2 \times \overline{EA}^2 \times \left(-\frac{1}{8}\right), \quad \overline{EA} = 4$$

그러므로 $\overline{EA} = \overline{ED}$ 에서 $\overline{ED} = 4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16. [출제의도] 곱의 미분법을 활용하여 미분계수를 구한다.

곱의 미분법에 의해 함수 $f(x)g(x)$ 의 도함수는

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f'(x) = 4x + 5, \quad g'(x) = 3x^2 \text{ 이므로}$$

$$f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 5 \times 2 + 3 \times 0 = 10$$

17. [출제의도] 로그의 진수에 미지수가 포함된 부등식을 해결한다.

이차방정식 $3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n = 0$ 의 판별식을

D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하기 위해서는

$$\frac{D}{4} = (\log_2 n)^2 - 3 \times \log_2 n < 0,$$

$$(\log_2 n - 3)\log_2 n < 0, \quad 0 < \log_2 n < 3, \quad 1 < n < 8$$

n 은 자연수이므로 $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

따라서 조건을 만족하는 자연수 n 의 개수는 6

18. [출제의도] 부정적분의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

$F(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1 & (x < 0) \\ k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2 는 적분상수)

그런데 $F(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $C_1 = C_2$

$$\text{즉, } F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1 & (x < 0) \\ k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

그러므로 $F(2) - F(-3) = 21$ 에서

$$\left(\frac{4}{3}k + C_1\right) - (-9 + C_1) = 21$$

따라서 $k = 9$

[다른 풀이]

$F(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로

$$F(2) - F(-3) = \left[F(x)\right]_{-3}^2 = \int_{-3}^2 f(x) dx$$

$$\int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-3}^0 (-2x) dx + \int_0^2 k(2x - x^2) dx$$

$$= \left[-x^2\right]_{-3}^0 + k\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= 9 + \frac{4}{3}k = 21$$

따라서 $k = 9$

19. [출제의도] 수열의 귀납적 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

$$S_{n+1} = a_{n+1} + S_n \text{ 이므로 } a_{n+1}S_n = a_n(a_{n+1} + S_n),$$

$$(S_n - a_n)a_{n+1} = a_n S_n$$

$$\text{즉, } S_{n-1}a_{n+1} = a_n S_n \quad (n \geq 2) \quad \text{㉠}$$

$$a_1 = S_1 = 2, \quad a_2 = 4 \text{ 이므로 } S_2 = a_1 + a_2 = 6$$

$$\text{㉠에서 } a_{n+1} = \frac{a_n S_n}{S_{n-1}} \quad \text{㉡}$$

㉡에 $n = 2, 3, 4$ 를 차례로 대입하면

$$a_3 = \frac{a_2 S_2}{S_1} = \frac{4 \times 6}{2} = 12 \text{에서 } S_3 = S_2 + a_3 = 6 + 12 = 18$$

$$a_4 = \frac{a_3 S_3}{S_2} = \frac{12 \times 18}{6} = 36 \text{에서 } S_4 = S_3 + a_4 = 18 + 36 = 54$$

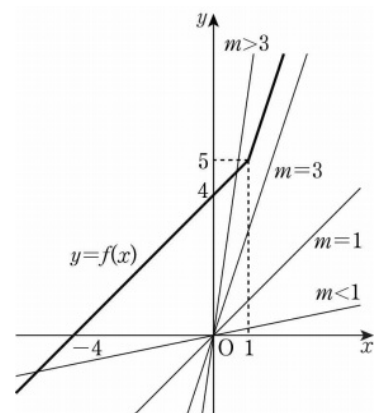
$$a_5 = \frac{a_4 S_4}{S_3} = \frac{36 \times 54}{18} = 108$$

따라서 $S_5 = S_4 + a_5 = 162$

20. [출제의도] 함수의 연속성을 이용하여 문제를 해결한다.

직선 $y = mx$ 는 실수 m 의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로 직선 $y = mx$ 와 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & (x < 1) \\ 3x+2 & (x \geq 1) \end{cases} \text{의 그래프는 다음과 같다.}$$



그러므로 함수 $g(m)$ 은

$$g(m) = \begin{cases} 1 & (m < 1 \text{ 또는 } m > 3) \\ 0 & (1 \leq m \leq 3) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(m)$ 은 $m=1$ 과 $m=3$ 에서 불연속이다.

그런데 함수 $g(x)h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1, x=3$ 에서도 연속이 되어야 한다.

(i) $x=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)h(x) = 1 \times h(1) = h(1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)h(x) = 0 \times h(1) = 0$$

함수 $g(x)h(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)h(x)$ 의 값이 존재한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)h(x) \text{에서 } h(1) = 0$$

(ii) $x=3$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)h(x) = 0 \times h(3) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)h(x) = 1 \times h(3) = h(3)$$

함수 $g(x)h(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \rightarrow 3} g(x)h(x)$ 의 값이 존재한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)h(x) \text{에서 } h(3) = 0$$

(i), (ii)에서 $h(1) = h(3) = 0$ 이므로 최고차항의

계수가 1인 이차함수 $h(x)$ 는 $h(x) = (x-1)(x-3)$

따라서 $h(5) = 4 \times 2 = 8$

21. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{AC} = k$ 라 하면 $\overline{BD} = 2k$ 이고

$$\overline{AH} : \overline{HB} = 1 : 3 \text{ 이므로 } \overline{AH} = \frac{1}{2}$$

$\angle CAB = \theta$ 라 할 때, 두 삼각형 ABC, ABD에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2r, \quad \frac{\overline{AD}}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{\overline{AD}}{\sin \theta} = 2R$$

$$\text{즉, } \overline{BC} = 2r \sin \theta, \quad \overline{AD} = 2R \sin \theta$$

$$4(R^2 - r^2) \times \sin^2 \theta = (2R \sin \theta)^2 - (2r \sin \theta)^2 \text{ 이므로}$$

$$\text{두 식을 } (2R \sin \theta)^2 - (2r \sin \theta)^2 = 51 \text{ 에 대입하면}$$

$$\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{삼각형 AHC 에서 } \cos \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2k} \text{ 이므로}$$

두 삼각형 ABC, ABD 에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta$$

$$= 4 + k^2 - 2 \times 2 \times k \times \cos \theta = k^2 + 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \cos(\pi - \theta)$$

$$= 4 + 4k^2 + 2 \times 2 \times 2k \times \cos \theta = 4k^2 + 8 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ 을 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 3k^2 + 6 = 51$$

$$\text{즉, } k^2 = 15$$

$$\text{따라서 } \overline{AC}^2 = 15$$

22. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수가 포함된 문제를 해결한다.

$g'(x) = (x^2 - 4)\{|f(x)| - a\}$ 에서 $x = -2, x = 2$ 가 방정식 $g'(x) = 0$ 의 근이지만 조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않아야 하므로 $x = -2$ 와 $x = 2$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 변하지 않아야 하고,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \{|f(x)| - a\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \{|f(x)| - a\} = \infty$ 이므로 $g'(x)$, $x^2 - 4$, $|f(x)| - a$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\dots	-2	\dots	2	\dots
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ f(x) - a$	$+$	0	$-$	0	$+$

함수 $|f(x)| - a$ 는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해 $|f(-2)| - a = 0$, $|f(2)| - a = 0$
두 실수 m, n 에 대하여 일차함수 $f(x) = mx + n$ 이라 하면 $m \neq 0$ 이고, $|2m + n| = |-2m + n| = a$ 가 성립한다.

(i) $2m + n = -2m + n$ 인 경우

$$m = 0 \text{ 이 되어 모순이다.}$$

(ii) $2m + n = -(-2m + n)$ 인 경우

$$n = 0 \text{ 이고 } |m| = \frac{a}{2} \text{ 이다.}$$

(i), (ii)에서 $|f(x)| = |mx| = \frac{a}{2}|x|$

$$g(2) = \int_0^2 (t^2 - 4)\{|f(t)| - a\} dt$$

$$= \int_0^2 (t^2 - 4) \left(\frac{a}{2}|t| - a \right) dt$$

단한구간 $[0, 2]$ 에서 $|t| = t$ 이므로

$$g(2) = \frac{a}{2} \int_0^2 (t^2 - 4)(t - 2) dt$$

$$= \frac{a}{2} \int_0^2 (t^3 - 2t^2 - 4t + 8) dt$$

$$= \frac{a}{2} \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 8t \right]_0^2$$

$$= \frac{a}{2} \times \left(4 - \frac{16}{3} - 8 + 16 \right) = \frac{10}{3}a$$

조건 (나)에서 $g(2) = 5$ 이므로 $\frac{10}{3}a = 5$, $a = \frac{3}{2}$

$$g(0) = \int_0^0 (t^2 - 4) \left(\frac{3}{4}|t| - \frac{3}{2} \right) dt = 0 \text{ 이고}$$

단한구간 $[-4, 0]$ 에서 $|t| = -t$ 이므로

$$g(-4) = \int_0^{-4} (t^2 - 4) \left(\frac{3}{4}|t| - \frac{3}{2} \right) dt$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{-4} (t^2 - 4)(-t - 2) dt$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{-4} (-t^3 - 2t^2 + 4t + 8) dt = -16$$

$$\text{따라서 } g(0) - g(-4) = 0 - (-16) = 16$$

[확률과 통계]

23	㉓	24	㉔	25	㉕	26	㉖	27	㉗
28	㉘	29	55	30	97				

23. [출제의도] 중복조합의 값을 계산한다.

$${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

24. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b 라 하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a 와 1개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$ 이다.

P 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a 와 2개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$

25. [출제의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

같은 학급의 대표 2명을 한 사람으로 보고 4명을 배열하는 원순열의 수는 $(4-1)! = 6$ 이다.

각 학급 대표 2명의 자리를 정하는 경우의 수는

$$2^4 = 16 \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 16 = 96$$

26. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

세 명의 학생에게 연필을 하나씩 나누어 주고 남은 3 자루의 연필을 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = 10$$

5개의 지우개를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = 21$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 21 = 210$$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$ 이다.

□에 숫자 3, 4를 나열하고 ∨ 중 두 곳에 숫자 1, 2를 각각 나열할 수 있다고 하자.

$$\vee \square \vee \square \vee \square \vee \square \vee \square$$

이 각각의 경우에 대하여 숫자 1, 2가 적힌 2장의 카드를 두 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하려면 ∨ 6곳 중 서로 다른 두 곳에 배열하는 경우의 수에서 연속으로 ∨ 두 곳에 배열하는 경우의 수를 빼면 되므로 이 경우의 수는

$${}_6P_2 - 5 \times 2 = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 20 = 200$$

28. [출제의도] 중복순열을 이용하여 문제를 해결한다.

(i) $f(3) = 4$ 또는 $f(3) = 10$ 인 경우

$$f(3) = 4 \text{ 이면 } f(2) = f(5) = 2 \text{ 이고,}$$

$f(1)$ 과 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 6, 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

$$f(3) = 10 \text{ 이면 } f(1) = f(4) = 12 \text{ 이고,}$$

$f(2)$ 와 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6, 8 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

그러므로 구하는 함수의 개수는

$$2 \times {}_4P_2 = 32$$

(ii) $f(3) = 6$ 또는 $f(3) = 8$ 인 경우

$f(3) = 6$ 이면 $f(2)$ 와 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(1)$ 과 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

$f(3) = 8$ 이면 $f(1)$ 과 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(2)$ 와 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

그러므로 구하는 함수의 개수는

$$2 \times {}_2P_2 \times {}_3P_2 = 72$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는

$$32 + 72 = 104$$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 문제를 해결한다.

c 가 5 이하의 자연수이므로 $1 \leq b \leq 4$ 이다.

(i) $b = 1$ 인 경우

$a \leq 2 \leq c \leq d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \text{ 이고, } c, d \text{를 택하는 경우의 수는 } {}_4H_2 \text{ 이다.}$$

그러므로 구하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_4H_2 = {}_2C_1 \times {}_5C_2 = 2 \times 10 = 20$$

(ii) $b = 2$ 인 경우

$a \leq 3 \leq c \leq d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \text{ 이고, } c, d \text{를 택하는 경우의 수는 } {}_3H_2 \text{ 이다.}$$

그러므로 구하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3H_2 = {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$$

(iii) $b = 3$ 인 경우

$a \leq 4 \leq c \leq d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 \text{ 이고, } c, d \text{를 택하는 경우의 수는 } {}_2H_2 \text{ 이다.}$$

그러므로 구하는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_2H_2 = {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 4 \times 3 = 12$$

(iv) $b = 4$ 인 경우

$a \leq 5 \leq c \leq d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \text{ 이고, } c, d \text{를 택하는 경우의 수는 } 1 \text{ 이다.}$$

그러므로 구하는 경우의 수는 ${}_5C_1 \times 1 = 5$

(i) ~ (iv)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$20 + 18 + 12 + 5 = 55$$

30. [출제의도] 중복순열을 이용하여 문제를 해결한다.

(i) 1, 2, 3에서만 선택한 후 나열하는 경우

1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우에서 2, 3 중에서만 선택하여 나열하는 경우를 제외하면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_3P_4 - {}_2P_4 = 3^4 - 2^4 = 65$

(ii) 1, 4, □, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우

1과 4의 위치를 정하는 경우의 수는

$$2 \times ({}_4C_2 - 3) = 6 \text{ 이고, } \square \text{에 들어갈 수를 정하는 경우의 수는 } 2^2 = 4 \text{ 이다.}$$

그러므로 구하는 경우의 수는 $6 \times 4 = 24$

(iii) 1, 1, 4, □ 또는 1, 4, 4, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우

1, 1, 4를 나열하는 경우는 $11\square 4, 4\square 11$ 이고, □에 2 또는 3을 나열할 수 있으므로 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$ 이다.

1, 4, 4, □인 경우는 1, 1, 4, □인 경우와 같은 방법으로 생각하면 경우의 수는 4이다.

그러므로 구하는 경우의 수는 $4 + 4 = 8$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$65 + 24 + 8 = 97$$

[미적분]

23	⑤	24	①	25	④	26	②	27	③
28	③	29	12	30	5				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - 1}{(n+2)(2n^2+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{1}{n^3}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)} = 5$$

24. [출제의도] 등비수열의 수렴 조건을 이해한다.

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하려면

$$-1 < \frac{x^2 - 4x}{5} \leq 1 \text{에서}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 > 0 \\ x^2 - 4x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

$x^2 - 4x + 5 > 0$ 에서 $(x-2)^2 + 1 > 0$ 이므로 모든 정수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0 \text{에서}$$

$$(x+1)(x-5) \leq 0, \quad -1 \leq x \leq 5$$

따라서 모든 정수 x 의 개수는 7이다.

25. [출제의도] 등비수열이 포함된 수열의 극한값을 구한다.

$a_{n+1} = a_1 a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a_1 , 공비가 a_1 인 등비수열이다.

그러므로 $a_n = a_1^n$ ($a_1 > 0$)

(i) $0 < a_1 < 1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_{n+3} - 5}{2a_n + 1} = -5 \neq 12$$

(ii) $a_1 = 1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_{n+3} - 5}{2a_n + 1} = -\frac{2}{3} \neq 12$$

(iii) $a_1 > 1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_{n+3} - 5}{2a_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_1^3 - \frac{5}{a_n}}{2 + \frac{1}{a_n}} = \frac{3}{2} a_1^3$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$\frac{3}{2} a_1^3 = 12, \quad a_1^3 = 8$$

따라서 $a_1 = 2$

26. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해한다.

$$2n^2 - 3 < a_n < 2n^2 + 4 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^n (2k^2 - 3) < S_n < \sum_{k=1}^n (2k^2 + 4)$$

이때

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k^2 - 3) &= 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n \\ &= \frac{n(2n^2 + 3n - 8)}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k^2 + 4) &= 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4n \\ &= \frac{n(2n^2 + 3n + 13)}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{n(2n^2 + 3n - 8)}{3n^3} < \frac{S_n}{n^3} < \frac{n(2n^2 + 3n + 13)}{3n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n^2 + 3n - 8)}{3n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n^2 + 3n + 13)}{3n^3} = \frac{2}{3}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3} = \frac{2}{3}$$

27. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해한다.

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+2)!} \text{이므로}$$

$$n=1 \text{일 때, } \frac{a_1}{0!} = \frac{3}{3!} \text{에서 } a_1 = \frac{1}{2}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{(n-1)!} &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{(k-1)!} \\ &= \frac{3}{(n+2)!} - \frac{3}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3(n-1)!}{(n+2)!} - \frac{3(n-1)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{3}{(n+2)(n+1)n} - \frac{3}{(n+1)n} \\ &= \frac{-3n-3}{(n+2)(n+1)n} \\ &= \frac{-3}{n(n+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + n^2 a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{3n}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

28. [출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = 4 + n^2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{n^2 + 4}$$

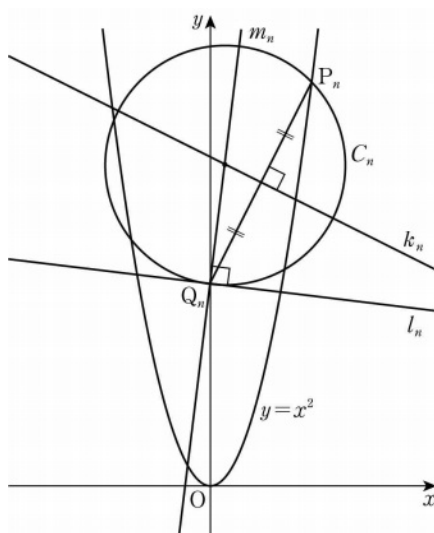
선분 AD가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 2 : n$$

$$\text{즉 } a_n = \overline{CD} = \frac{n}{n+2} \times \overline{BC} = \frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2 - \sqrt{n^2+4})}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n+2} \times \frac{(n+2)^2 - (n^2+4)}{n+2 + \sqrt{n^2+4}} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} \times \frac{4n}{n+2 + \sqrt{n^2+4}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{n}} \times \frac{4}{1 + \frac{2}{n} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

29. [출제의도] 접선의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.



점 Q_n 을 지나고 직선 l_n 에 수직인 직선을 m_n 이라 하면 원 C_n 의 중심은 직선 m_n 위에 존재한다. 직선 m_n 은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P_n 에서의 접선과 평행하고 $y'=2x$ 이므로 직선 m_n 의 기울기는 $4n$ 이다. 직선 m_n 이 점 Q_n 을 지나므로 직선 m_n 의 방정식은 $y=4nx+2n^2$ 선분 P_nQ_n 의 수직이등분선을 k_n 이라 하면 원 C_n 의

중심은 직선 k_n 위에 존재한다.

직선 P_nQ_n 의 기울기는 n , 선분 P_nQ_n 의 중점의 좌표는 $(n, 3n^2)$ 이므로 직선 k_n 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{n}(x-n) + 3n^2$$

$$y = -\frac{1}{n}x + 3n^2 + 1$$

원 C_n 의 중심은 두 직선 m_n, k_n 의 교점이므로 원 C_n 의 중심의 좌표를 (x_n, y_n) 이라 하면

$$4nx_n + 2n^2 = -\frac{1}{n}x_n + 3n^2 + 1 \text{에서}$$

$$\left(4n + \frac{1}{n}\right)x_n = n^2 + 1$$

$$x_n = \frac{n^3 + n}{4n^2 + 1}$$

$$y_n = 4n \times \frac{n^3 + n}{4n^2 + 1} + 2n^2 = \frac{12n^4 + 6n^2}{4n^2 + 1}$$

원점을 지나고 원 C_n 의 넓이를 이등분하는 직선은 이 원의 중심을 지나야 하므로

$$a_n = \frac{y_n}{x_n} = \frac{12n^4 + 6n^2}{n^3 + n} = \frac{12n^3 + 6n}{n^2 + 1}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 + 6}{n^2 + 1} = 12$$

30. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$$f(x) = x(x-n)(x-3n^2)$$

$$= x^3 - (3n^2+n)x^2 + 3n^3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(3n^2+n)x + 3n^3$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{3n^2 + n - \sqrt{9n^4 - 3n^3 + n^2}}{3}$$

$$\text{또는 } x = \frac{3n^2 + n + \sqrt{9n^4 - 3n^3 + n^2}}{3}$$

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$x = \frac{3n^2 + n - \sqrt{9n^4 - 3n^3 + n^2}}{3} \text{에서 극댓값을 갖는다.}$$

$$\text{즉 } a_n = \frac{3n^2 + n - \sqrt{9n^4 - 3n^3 + n^2}}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - \sqrt{9n^4 - 3n^3 + n^2}}{3n}$$

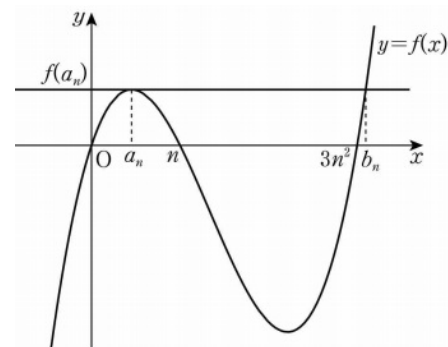
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1 - \sqrt{9n^2 - 3n + 1}}{3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^2 - (9n^2 - 3n + 1)}{3(3n+1 + \sqrt{9n^2 - 3n + 1})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3n+1 + \sqrt{9n^2 - 3n + 1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3 + \frac{1}{n} + \sqrt{9 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}$$



방정식 $f(x) - f(a_n) = 0$ 은 $x = a_n$ 을 중근으로 가지고,

a_n 이 아닌 근이 b_n 이므로

$$f(x) - f(a_n) = (x - a_n)^2(x - b_n)$$

$x=0$ 을 대입하면 $f(0) = 0$ 이므로 $f(a_n) = a_n^2 b_n$ 에서

$$a_n^2 b_n = a_n^3 - (3n^2 + n)a_n^2 + 3n^3 a_n$$

양변을 $n^3 a_n$ 으로 나누면

$$\frac{a_n b_n}{n^3} = \frac{a_n^2 - (3n^2 + n)a_n + 3n^3}{n^3}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - (3n^2 + n)a_n + 3n^3}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \times \left(\frac{a_n}{n} \right)^2 - \frac{3n^2 + n}{n^2} \times \frac{a_n}{n} + 3 \right\} \\ &= 0 - 3 \times \frac{1}{2} + 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$p=2, q=3$ 이므로

$p+q=5$

[기하]

23	③	24	①	25	②	26	④	27	③
28	⑤	29	12	30	15				

23. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 초점을 구한다.

타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 의 두 초점의 좌표는

$(4, 0), (-4, 0)$ 이므로 $\overline{FF'} = 8$

24. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해한다.

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 이라 하자. 주축의 길이가 8이므로 $2a=8$ 에서

$a=4$

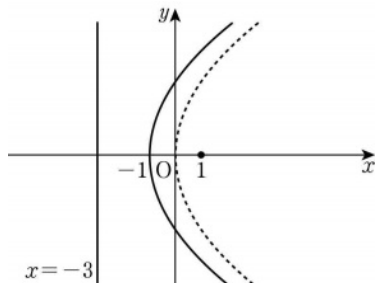
한 점근선의 기울기가 $\frac{3}{4}$ 이므로 $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ 에서

$b=3$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$c > 0$ 이므로 $c=5$

25. [출제의도] 포물선의 방정식을 이해한다.



꼭짓점이 점 $(-1, 0)$ 이고 준선이 직선 $x = -3$ 인 포물선의 초점은 $(1, 0)$ 이므로 구하는 포물선은 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다. 따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$y^2 = 8(x+1), \text{ 즉 } y^2 = 8x + 8$$

$a=8, b=8$ 이므로

$$a+b=16$$

26. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점 F, F' 의 좌표를

각각 $(c, 0), (-c, 0) (c > 0)$ 이라 하면

$$c^2 = 9 + 16 = 25$$

에서 $c=5$ 이므로 $F(5, 0), F'(-5, 0)$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{AF'} - \overline{AF} = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

삼각형 $AF'F$ 의 둘레의 길이가 24이므로

$$\overline{AF} + \overline{AF'} + \overline{FF'} = 24$$

이고 $\overline{FF'} = 10$ 이므로

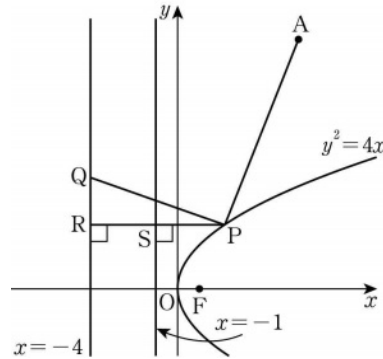
$$\overline{AF} + \overline{AF'} = 14 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $\overline{AF} = 4, \overline{AF'} = 10$ 이므로 삼각형 $AF'F$ 는 이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 $AF'F$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{10^2 - 2^2} = 8\sqrt{6}$$

27. [출제의도] 포물선의 초점과 준선의 성질을 이해한다.



포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점은 $F(1, 0)$ 이다. 점 P 에서 직선 $x = -4$ 와 포물선의 준선 $x = -1$ 에 내린 수선의 발을 각각 R, S 라 하면

$$\overline{PR} = \overline{PS} + \overline{SR} = \overline{PS} + 3$$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PS} = \overline{PF}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PQ} &\geq \overline{AP} + \overline{PR} \\ &= \overline{AP} + \overline{PS} + 3 \\ &= \overline{AP} + \overline{PF} + 3 \\ &\geq \overline{AF} + 3 \\ &= \sqrt{5^2 + 12^2} + 3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

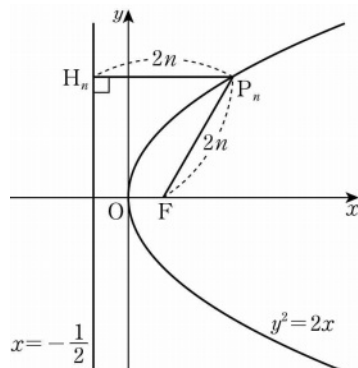
따라서 점 P 는 선분 AF 와 포물선 $y^2 = 4x$ 가 만나는 점이고, 이 교점에서 직선 $x = -4$ 에 내린 수선의 발이 Q 일 때, $\overline{AP} + \overline{PQ}$ 는 최솟값 16을 가진다.

28. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.

포물선 $y^2 = 2x$ 의 초점은 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 이고

준선은 직선 $x = -\frac{1}{2}$ 이다.

점 P_n 에서 직선 $x = -\frac{1}{2}$ 에 내린 수선의 발을 H_n 이라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$$\overline{P_n H_n} = \overline{FP_n} = 2n$$

이므로 점 P_n 의 x 좌표는 $2n - \frac{1}{2}$ 이다.

$$y^2 = 2\left(2n - \frac{1}{2}\right) = 4n - 1$$

에서 점 P_n 의 y 좌표는 $\sqrt{4n-1}$ 이다.

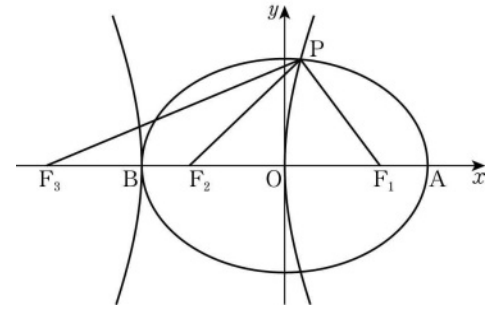
따라서 점 P_n 의 좌표는 $\left(2n - \frac{1}{2}, \sqrt{4n-1}\right)$ 이고

$$\begin{aligned} \overline{OP_n} &= \sqrt{\left(2n - \frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{4n-1})^2} \\ &= \sqrt{4n^2 - 2n + \frac{1}{4} + 4n - 1} \\ &= \sqrt{4n^2 + 2n - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 \overline{OP_n}^2 &= \sum_{n=1}^8 \left(4n^2 + 2n - \frac{3}{4}\right) \\ &= 4 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} + 2 \times \frac{8 \times 9}{2} - 8 \times \frac{3}{4} \\ &= 882 \end{aligned}$$

29. [출제의도] 타원과 쌍곡선의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.



점 P 에서 타원의 두 초점 F_1, F_2 까지의 거리의 합은 장축인 선분 AB 의 길이와 같다.

$$\text{즉 } \overline{PF_2} + \overline{PF_1} = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

점 P 에서 쌍곡선의 두 초점 F_1, F_3 까지의 거리의 차는 주축인 선분 BO 의 길이와 같다.

$$\text{즉 } \overline{PF_3} - \overline{PF_1} = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 더하면

$$\overline{PF_2} + \overline{PF_3} = 9$$

쌍곡선의 두 초점이 F_3, F_1 이므로

$$\overline{F_3 B} = \overline{OF_1} = c$$

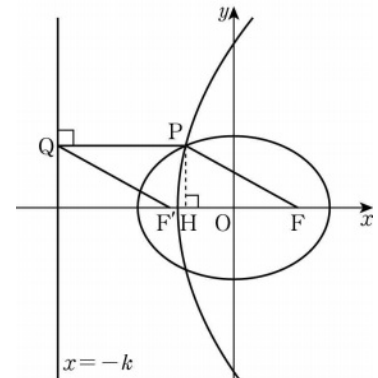
$$\overline{BF_2} = \overline{BO} - \overline{F_2 O} = 3 - c$$

$$\text{그러므로 } \overline{F_3 F_2} = \overline{F_3 B} + \overline{BF_2} = 3$$

따라서 삼각형 $PF_3 F_2$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF_2} + \overline{PF_3} + \overline{F_3 F_2} = 12$$

30. [출제의도] 포물선과 타원의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



점 F 가 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{FP} = \overline{PQ}$ 이다.

조건 (나)의 $\overline{FP} - \overline{F'Q} = \overline{PQ} - \overline{FF'}$ 에서

$$\overline{F'Q} = \overline{FF'}$$

두 직선 FF', PQ 가 서로 평행하므로

두 삼각형 $PQF, F'FQ$ 에서

$$\angle PQF = \angle F'FQ$$

두 삼각형 $PQF, F'FQ$ 는 모두 이등변삼각형이므로

$$\angle QFP = \angle PQF = \angle F'FQ = \angle F'QF$$

이고, 선분 FQ 는 공통이므로

두 삼각형 $PQF, F'FQ$ 는 서로 합동이다.

$$\text{즉 } \overline{FP} = \overline{PQ} = \overline{F'Q} = \overline{FF'}$$

장축의 길이가 12 이고 $\overline{FP} = \overline{FF'} = 2c$ 이므로

$$\overline{PF'} = 12 - 2c$$

삼각형 PPF' 에서 코사인법칙에 의하여

$$(12 - 2c)^2 = (2c)^2 + (2c)^2 - 2 \times (2c)^2 \times \cos(\angle F'FP)$$

$$c^2 - 16c + 48 = 0$$

$$(c-4)(c-12) = 0$$

장축의 길이가 12이므로 $c < 6$ 에서 $c=4$

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$$\overline{FP} = 8 \text{에서}$$

$$\overline{FH} = \overline{FP} \times \cos(\angle F'FP) = 7$$

$\overline{FH} = 7$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $4 - 7 = -3$ 이고

$\overline{PQ} = \overline{FP} = 8$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $-k + 8$ 이므로

$$-3 = -k + 8, \text{ 즉 } k = 11$$

따라서 $c+k=15$