

[공통: 수학 I·수학 II]

01. ④ 02. ⑤ 03. ① 04. ① 05. ③
 06. ④ 07. ② 08. ④ 09. ⑤ 10. ②
 11. ② 12. ③ 13. ⑤ 14. ③ 15. ②
 16. 2 17. 11 18. 4 19. 6 20. 8
 21. 24 22. 61

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & 2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}} \\ &= 2^{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})} \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

2. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (3x^2 - 2x) dx \\ &= x^3 - x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수}) \\ f(1) &= 1^3 - 1^2 + C = 1 \text{에서} \\ C &= 1 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ 이므로

$$f(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 5$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 삼각함수의 정의를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\tan \theta = \frac{12}{5} \text{이고 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

각 θ 가 나타내는 동경과 원점 O 를 중심으로 하는 어떤 원의 교점이

$P(-5, -12)$ 이다.

따라서 원점 O 에 대하여

$$\overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$$

이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{-12}{13} + \frac{-5}{13} = -\frac{17}{13}$$

정답 ①

4. 출제의도 : 함수의 그래프에서 좌극한의 값과 우극한의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ &= -2 + 0 = -2 \end{aligned}$$

정답 ①

5. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g(x) = (x^2 + 3)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 3)f'(x)$$

따라서

$$\begin{aligned}
 g'(1) &= 2f(1) + 4f'(1) \\
 &= 2 \times 2 + 4 \times 1 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

정답 ③

6. 출제의도 : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = 3x^2 - x$ 와 직선 $y = 5x$ 의 교점의 x 좌표는

$$3x^2 - x = 5x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

구간 $[0, 2]$ 에서 직선 $y = 5x$ 가 곡선 $y = 3x^2 - x$ 보다 위쪽에 있거나 만나므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \{5x - (3x^2 - x)\} dx \\
 &= \int_0^2 (6x - 3x^2) dx \\
 &= [3x^2 - x^3]_0^2 \\
 &= 3(4 - 0) - (8 - 0) \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

정답 ④

7. 출제의도 : 등차수열에서 주어진 조건을 만족시키는 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_3 - S_2 = a_3 \text{이므로}$$

$$a_6 = 2a_3$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$2 + 5d = 2(2 + 2d)$$

$$2 + 5d = 4 + 4d \text{에서}$$

$$d = 2$$

따라서 $a_{10} = 2 + 9 \times 2 = 20$ 이므로

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} \\
 &= \frac{10 \times (2 + 20)}{2} \\
 &= 110
 \end{aligned}$$

정답 ②

8. 출제의도 : 함수의 연속성의 성질을 이용하여 주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$ 이 $x = a$ 에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $\{f(x)\}^2$ 이 $x = a$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a^-} \{f(x)\}^2 = \{f(a)\}^2$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a^+} (2x - a)^2 = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a^-} (-2x + 6)^2 = (-2a + 6)^2$$

$$\{f(a)\}^2 = (2a - a)^2 = a^2$$

이므로

$$a^2 = (-2a+6)^2 \text{에서}$$

$$3(a-2)(a-6) = 0$$

$$a = 2 \text{ 또는 } a = 6$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$2+6=8$$

정답 ④

9. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

$$a_{12} = \frac{1}{2} \text{ 이고 } a_{12} = \frac{1}{a_{11}} \text{ 이므로}$$

$$a_{11} = 2$$

$$\text{또, } a_{11} = 8a_{10} \text{ 이므로}$$

$$a_{10} = \frac{1}{4}$$

$$\text{또, } a_{10} = \frac{1}{a_9} \text{ 이므로}$$

$$a_9 = 4$$

$$\text{또, } a_9 = 8a_8 \text{ 이므로}$$

$$a_8 = \frac{1}{2}$$

$$\text{또, } a_8 = \frac{1}{a_7} \text{ 이므로}$$

$$a_7 = 2$$

$$\text{또, } a_7 = 8a_6 \text{ 이므로}$$

$$a_6 = \frac{1}{4}$$

$$\text{또, } a_6 = \frac{1}{a_5} \text{ 이므로}$$

$$a_5 = 4$$

$$\text{또, } a_5 = 8a_4 \text{ 이므로}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}$$

$$\text{또, } a_4 = \frac{1}{a_3} \text{ 이므로}$$

$$a_3 = 2$$

$$\text{또, } a_3 = 8a_2 \text{ 이므로}$$

$$a_2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{또, } a_2 = \frac{1}{a_1} \text{ 이므로}$$

$$a_1 = 4$$

따라서

$$a_1 + a_4 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

정답 ⑤

10. 출제의도 : 로그함수의 그래프가 만나는 점이 조건을 만족하도록 하는 n 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에서 $x > 0$

$$-\log_n(x+3)+1 = \log_n \frac{n}{x+3} \text{ 이므로}$$

$$\log_n x = \log_n \frac{n}{x+3} \text{ 에서}$$

$$x = \frac{n}{x+3}$$

$$x^2 + 3x - n = 0$$

$$f(x) = x^2 + 3x - n \text{ 이라 하면}$$

$$f(1) < 0, f(2) > 0 \text{ 이어야 한다.}$$

$$f(1) = 4 - n < 0 \text{ 에서 } n > 4$$

$$f(2) = 10 - n > 0 \text{ 에서 } n < 10$$

따라서 $4 < n < 10$ 이므로

n 의 값은 5, 6, 7, 8, 9이고, 그 합은

$$5+6+7+8+9=35$$

정답 ②

11. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = -f(x+1) + 1$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 후, x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 것이다.

$$f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$$

이므로

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 g(x) dx &= \int_{-1}^0 \{-f(x+1) + 1\} dx \\ &= 1 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^1 g(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$$

= 1

조건 (나)에서

$$g(x+2) = g(x)$$

이므로

$$\int_{-3}^2 g(x) dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} g(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx + \int_1^2 g(x) dx$$

$$= 2 \int_{-1}^1 g(x) dx + \int_{-1}^0 g(x) dx$$

$$= 2 \times 1 + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{17}{6}$$

정답 ②

12. 출제의도 : 코사인법칙과 삼각비를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABD에서

$\angle BAC = \angle BDA$ 이고 $\overline{AB} = 4$ 이므로

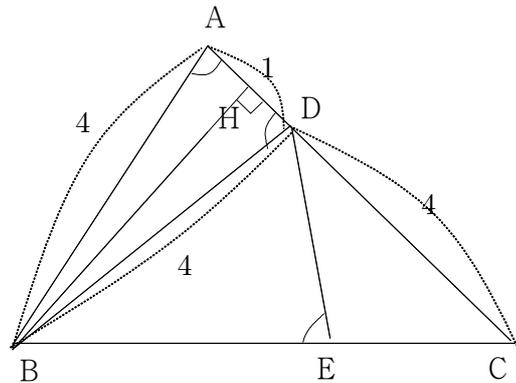
$$\overline{BD} = 4 \dots \text{⊙}$$

이때, 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \overline{AB} \cos(\angle BAC) = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

그러므로

$$\overline{AD} = 1$$

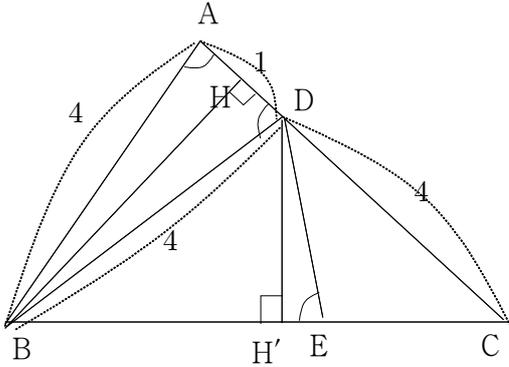


삼각형 BCD는 $\overline{DB} = \overline{DC} = 4$ 인 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H' , $\overline{DE} = x$ 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{DH'} &= x \sin(\angle H'ED) \\ &= x \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{63}}{8}x \quad \dots\dots \textcircled{L}$$



한편, 삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \\ &\quad - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\angle BAC) \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{8} \\ &= 36 \end{aligned}$$

이므로

$$\overline{BC} = 6$$

이때,

$$\overline{BH'} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{M}$$

직각삼각형 DBH'에서 ㉠, ㉡, ㉢을 이용하면

$$4^2 = \left(\frac{\sqrt{63}}{8}x\right)^2 + 3^2$$

$$\frac{63}{64}x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{64}{9}$$

$$\overline{DE} = x \text{이므로 } x > 0$$

$$\text{따라서 } \overline{DE} = \frac{8}{3}$$

정답 ③

13. 출제의도 : 주기함수에서 함숫값을 구하고, 그 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $k=1, 4, 9, 16$ 일 때

$$f(1) = 1 \text{이고 } f(x+1) = f(x) \text{이므로}$$

$$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1 \text{에서}$$

$$f(\sqrt{k}) = 1$$

(ii) $k \neq 1, 4, 9, 16$ 일 때

$$f(\sqrt{k}) = 3$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{20} k = 210 \text{이고, } 1+4+9+16 = 30 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} \left\{ k \times \frac{f(\sqrt{k})}{3} \right\}$$

$$= 30 \times \frac{1}{3} + (210 - 30) \times \frac{3}{3}$$

$$= 10 + 180 = 190$$

정답 ⑤

14. 출제의도 : 절댓값을 포함한 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$= 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | | |
|---------|-----|----|-----|----|-----|
| x | ... | -1 | ... | 3 | ... |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 $f(-1)=-7$ 을 갖고, $x=3$ 에서 극솟값 $f(3)=-39$ 를 갖는다.

조건 (가)에서

$$xg(x) = |xf(x-p) + qx|$$

이므로

$$g(x) = \begin{cases} |f(x-p) + q| & (x > 0) \\ -|f(x-p) + q| & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$|f(-p) + q| = -|f(-p) + q|$$

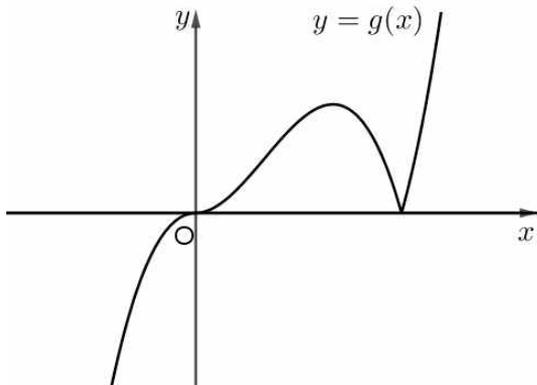
즉, $|f(-p) + q| = 0$ 이어야 한다.

한편, 함수 $y = |f(x-p) + q|$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동시킨 후, $y < 0$ 인 부분에 그려진 부분을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 것이다.

이때, p, q 가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않은 실수 a 의 개수가 1이므로

$p=1, q=7$ 이어야 한다.

따라서 $p+q=1+7=8$



15. 출제의도 :

삼각함수의 그래프를 이해하고 이를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식의 근에 관련된 문제를 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

방정식

$$\left(\sin \frac{\pi x}{2} - t\right) \left(\cos \frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

에서

$$\sin \frac{\pi x}{2} = t \quad \text{또는} \quad \cos \frac{\pi x}{2} = t$$

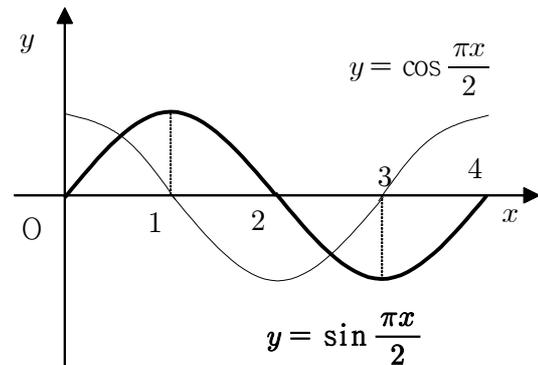
이 방정식의 실근은 두 함수

$$y = \sin \frac{\pi x}{2}, \quad y = \cos \frac{\pi x}{2}$$

의 그래프와 $y=t$ 와의 교점의 x 좌표이다.

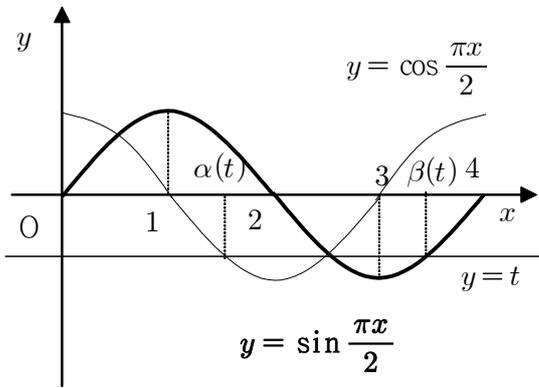
한편, 두 함수 $y = \sin \frac{\pi x}{2}, \quad y = \cos \frac{\pi x}{2}$

의 주기가 모두 4이므로 다음과 같다.



$-1 \leq t < 0$ 이면 직선 $y=t$ 와 $\alpha(t), \beta(t)$ 는 다음 그림과 같다.

정답 ③



이때, 함수 $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ 의 그래프는 함수

$y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 의 그래프를 평행이동시키면

겹쳐질 수 있고 함수 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 의 그래

프는 직선 $x=1, x=3$ 에 대하여 대칭이
고 점 $(2, 0)$ 에 대하여 대칭이다.

그러므로

$$\alpha(t) = 1 + k \quad (0 < k \leq 1)$$

로 놓으면

$$\beta(t) = 4 - k$$

그러므로

$$\alpha(t) + \beta(t) = 5 \quad \text{<참>}$$

∴

실근 $\alpha(t), \beta(t)$ 는 집합 $\{x | 0 \leq x < 4\}$ 의
원소이므로

$$\beta(0) = 3, \alpha(0) = 0$$

그러므로 주어진 식은

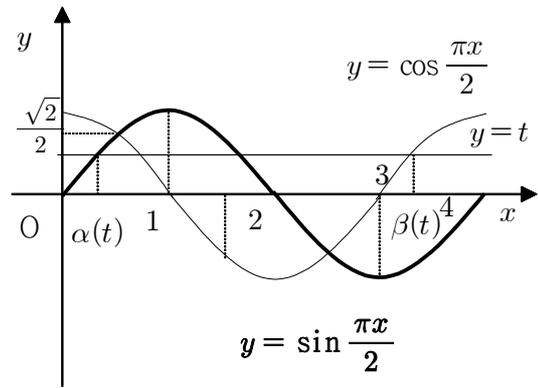
$$\{t | \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\}$$

$$= \{t | \beta(t) - \alpha(t) = 3\}$$

(i) $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

$$t=0\text{이면 } \beta(0) - \alpha(0) = 3 - 0 = 3$$

$t \neq 0$ 이면 다음 그림과 같다.



이때,

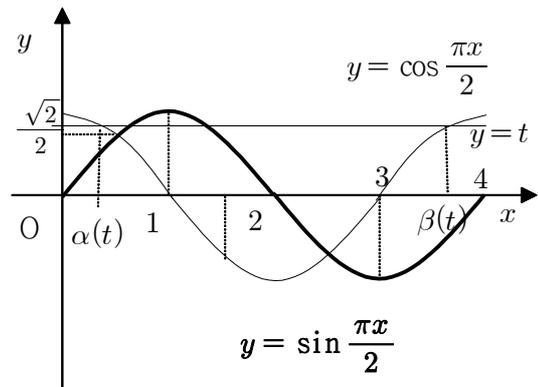
$$\alpha(t) = k \quad \left(0 < k \leq \frac{1}{2}\right)$$

이라 하면

$$\beta(t) = 3 + k$$

$$\text{그러므로 } \beta(t) - \alpha(t) = 3$$

(ii) $\frac{\sqrt{2}}{2} < t < 1$ 일 때,



이때,

$$\alpha(t) = k \quad \left(0 < k < \frac{1}{2}\right)$$

이라 하면

$$\beta(t) = 4 - k$$

그러므로

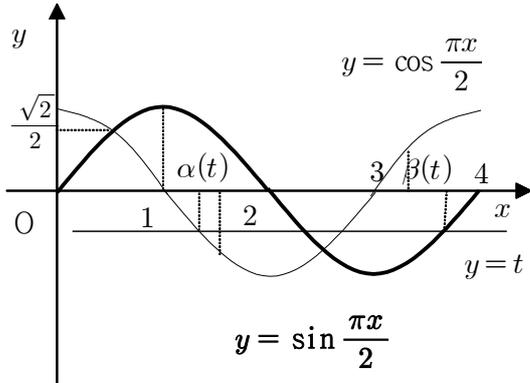
$$\beta(t) - \alpha(t) = 4 - 2k \quad (0 < 2k < 1)$$

(iii) $t=1$ 일 때,

$$\alpha(1) = 0, \beta(1) = 1 \text{이므로}$$

$$\beta(1) - \alpha(1) = 1$$

(iv) $-1 \leq t < 0$ 일 때,



$1 < \alpha(t) \leq 2, 3 \leq \beta(t) < 4$ 이므로

$$\beta(t) - \alpha(t) < 3$$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서

$$\{t | \beta(t) - \alpha(t) = 3\}$$

$$= \left\{ t \mid 0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \quad \text{<참>}$$

ㄷ, $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ 이기 위해서는

$$0 < t_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < t_2$$

이때, $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \alpha$ 라 하면

$$t_1 = \sin \frac{\pi}{2} \alpha, \quad t_2 = \cos \frac{\pi}{2} \alpha$$

이때, $t_2 = t_1 + \frac{1}{2}$ 이므로

$$\cos \frac{\pi}{2} \alpha = \sin \frac{\pi}{2} \alpha + \frac{1}{2}$$

이 식을 $\cos^2 \frac{\pi}{2} \alpha + \sin^2 \frac{\pi}{2} \alpha = 1$ 에 대입하

면

$$2\sin^2 \frac{\pi}{2} \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \alpha + \frac{1}{4} = 1$$

$$8\sin^2 \frac{\pi}{2} \alpha + 4\sin \frac{\pi}{2} \alpha - 3 = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2} \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{8}$$

이때, $\sin \frac{\pi}{2} \alpha > 0$ 이므로

$$\sin \frac{\pi}{2} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4}$$

그러므로

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4},$$

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$$

따라서

$$t_1 \times t_2 = \frac{(-1 + \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})}{16} = \frac{3}{8} \text{ <거짓>}$$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$$

$$= \log_4 \left(\frac{2}{3} \times 24 \right)$$

$$= \log_4 16$$

$$= \log_4 4^2$$

$$= 2$$

정답 2

17. 출제의도 : 다항함수의 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | | |
|---------|-----|----|-----|----|-----|
| x | ... | -1 | ... | 1 | ... |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.

따라서 $a=1$

$$f(a) = f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 12 = 10$$

이므로

$$a + f(a) = 1 + f(1) = 1 + 10 = 11$$

정답 11

18. 출제의도 : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r , $a_1 = a$ 라 하면 $a_2 = 36$ 에서

$$ar = 36 \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또, } a_7 = \frac{1}{3}a_5 \text{에서}$$

$$ar^6 = \frac{1}{3}ar^4$$

$$r^2 = \frac{1}{3} \dots\dots \textcircled{8}$$

따라서 $\textcircled{7}$ 과 $\textcircled{8}$ 에서

$$a_6 = ar^5 = ar \times r^4$$

$$= 36 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= 4$$

정답 4

19. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 점의 위치의 변화량을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t 에서 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면 시각 $t=0$ 에서 점 P의 위치가 0이므로

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k \text{에서}$$

$$x(t) = t^3 - 2t^2 + kt$$

이때 $x(1) = -3$ 에서

$$-1 + k = -3, \quad k = -2$$

따라서 $x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$ 이고,

$$x(3) = 27 - 18 - 6 = 3 \text{이다.}$$

그러므로 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$x(3) - x(1) = 3 - (-3) = 6$$

정답 6

20. 출제의도 : 정적분으로 나타내어진 함수가 극값을 하나만 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$$

$$= 3(x-3)(x-5)$$

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

$$= f(x) \int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

$$g'(x) = f'(x) \int_a^x \{f(t)\}^4 dt + \{f(x)\}^5 - \{f(x)\}^5$$

$$= f'(x) \int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

$g'(x) = 0$ 에서

$f'(x) = 0$ 또는 $x = a$

(i) $a \neq 3, a \neq 5$ 일 때,

$g'(x) = 0$ 에서

$x = 3$ 또는 $x = 5$ 또는 $x = a$

함수 $g(x)$ 는 $x = 3, x = 5, x = a$ 에서 모두 극값을 갖는다.

(ii) $a = 3$ 일 때

$g'(x) = 0$ 에서

$x = 3$ 또는 $x = 5$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | | |
|---------|-----|---|-----|----|-----|
| x | ... | 3 | ... | 5 | ... |
| $g'(x)$ | - | 0 | - | 0 | + |
| $g(x)$ | ↘ | | ↘ | 극소 | ↗ |

함수 $g(x)$ 는 $x = 5$ 에서만 극값을 갖는다.

(iii) $a = 5$ 일 때

$g'(x) = 0$ 에서

$x = 3$ 또는 $x = 5$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | | |
|---------|-----|----|-----|---|-----|
| x | ... | 3 | ... | 5 | ... |
| $g'(x)$ | - | 0 | + | 0 | + |
| $g(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | | ↗ |

함수 $g(x)$ 는 $x = 3$ 에서만 극값을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서

함수 $g(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$3 + 5 = 8$$

정답 8

21. 출제의도 : a 의 n 제곱근의 의미를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음수이므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i) n 이 홀수일 때,

방정식 $x^n = 64$ 의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 방정식 $(x^n - 64)f(x) = 0$ 의 근이 모두 중근일 수 없다.

(ii) n 이 짝수일 때,

방정식 $x^n = 64$ 의 실근은

$$x = \sqrt[n]{64} \text{ 또는 } x = -\sqrt[n]{64}$$

즉,

$$x = 2^{\frac{6}{n}} \text{ 또는 } x = -2^{\frac{6}{n}}$$

이때, 조건 (가)를 만족하기 위해서는

$$f(x) = \left(x - 2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x + 2^{\frac{6}{n}}\right) \dots \textcircled{\ominus}$$

한편, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 음의 정수이다. $\textcircled{\ominus}$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 최솟값을 갖고 그 값은

$$-2^{\frac{6}{n}} \times 2^{\frac{6}{n}} = -2^{\frac{12}{n}}$$

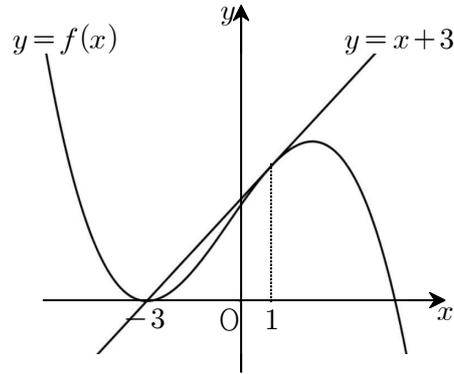
이 값이 음의 정수이기 위해서는 n 의 값은

$$2, 4, 6, 12$$

따라서 (i), (ii)에서 n 의 모든 값의 합은

$$2+4+6+12=24$$

정답 24



22. 출제의도 : 방정식의 실근의 개수를 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수의 그래프를 찾고, 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면

$$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$x-f(x)=\alpha \text{ 또는 } x-f(x)=\beta$$

를 만족시키는 서로 다른 x 의 값의 개수가 3이어야 한다.

즉 $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=x-\alpha, y=x-\beta$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 한다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$\text{접선의 방정식은 } y=x+3$$

그런데 $f(0)>0, f'(0)>1$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x+3$ 는 그림과 같다.

$$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2 \text{이므로}$$

$$f(x)=k(x+3)(x-1)^2+x+3$$

$$f'(x)=k(x-1)^2+k(x+3)\times 2(x-1)+1$$

..... ㉠

이때, $f'(-3)=0$ 이므로

㉠에 $x=-3$ 을 대입하면

$$0=k\times 16+1 \text{에서 } k=-\frac{1}{16}$$

따라서

$$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)(x-1)^2+x+3 \text{이므로}$$

$$f(0)=-\frac{1}{16}\times 3\times 1+3=\frac{45}{16}$$

즉 $p=16, q=45$ 이므로

$$p+q=16+45=61$$

정답 61

[선택: 확률과 통계]

23. ④ 24. ② 25. ③ 26. ③ 27. ①
28. ⑤ 29. 48 30. 47

23. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(2x+1)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (2x)^{5-r} (1)^r = {}_5C_r \times 2^{5-r} \times x^{5-r}$$

$$(r=0, 1, 2, \dots, 5)$$

x^3 항은 $5-r=3$, 즉 $r=2$ 일 때이므로 x^3 의 계수는

$${}_5C_2 \times 2^{5-2} = 10 \times 8 = 80$$

정답 ④

24. **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 조사에 참여한 학생 중에서 한 명을 선택하는 경우의 수는 20

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생인 사건을 B, 1학년 학생인 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $P(E|B)$ 이다.

이때 $P(B) = \frac{9}{20}$ 이고, 사건 $E \cap B$ 는 진로활동 B를 선택한 1학년 학생을 선택하는 사건이므로

$$P(E \cap B) = \frac{5}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(E|B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{9}$$

정답 ②

25. **출제의도** : 중복순열의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_4 = 5^4$$

이 중에서 3500보다 큰 경우는 다음과 같다.

(i) 천의 자리의 숫자가 3, 백의 자리의 숫자가 5인 경우

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_2 = 5^2$$

(ii) 천의 자리의 숫자가 4 또는 5인 경우

천의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 나머지 세 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3$$

이므로 이 경우의 수는

$$2 \times 5^3$$

(i), (ii)에 의하여 3500보다 큰 자연수의 개수는

$$5^2 + 2 \times 5^3$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5^2 + 2 \times 5^3}{5^4} = \frac{11}{25}$$

정답 ③

26. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생에게는 노란색 카드 1장을 반드시 주어야 한다.

노란색 카드 1장을 받을 학생을 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 이 학생에게 파란색 카드 1장을 먼저 준 후 나머지 파란색 카드 1장을 줄 학생을 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 노란색 카드를 받은 학생에게 빨간색 카드 1장도 먼저 준 후 나머지 빨간색 카드 3장을 나누어 줄 학생을 선택하는 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3$$

$$= {}_5C_3$$

$$= {}_5C_2$$

$$= \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 10 = 90$$

정답 ③

27. 출제의도 : 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하고 이를 이용하여 수학적 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$$6^2 \times 2^4$$

(i) 앞면이 나온 동전의 개수가 1인 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 (1, 1)이어야 하므로 이 경우의 수는

$$4 \times 1 = 4$$

(ii) 앞면이 나온 동전의 개수가 2인 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 (1, 2) 또는 (2, 1)이어야 하므로 이 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12$$

(iii) 앞면이 나온 동전의 개수가 3인 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 (1, 3), 또는 (3, 1)이어야 하므로 이

경우의 수는

$$4 \times 2 = 8$$

(iv) 앞면이 나온 동전의 개수가 4인 경우의 수는

$${}_4C_4 = 1$$

이때 두 주사위에서 나온 눈의 수가 (1, 4) 또는 (2, 2) 또는 (4, 1)이어야 하므로 이 경우의 수는

$$1 \times 3 = 3$$

(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$4 + 12 + 8 + 3 = 27$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{27}{6^2 \times 2^4} = \frac{3}{64}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 주사위를 네 번 던질 때 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 0인 경우

1의 눈만 네 번 나와야 하므로 이 경우의 수는

$$1$$

(ii) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 1인 경우

1의 눈이 두 번, 2의 눈이 한 번

나와야 하므로 점수 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

이 각각에 대하여 4 이상의 눈이 한 번 나오는 경우의 수는 3이므로 이 경우의 수는

$$12 \times 3 = 36$$

(iii) 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수가 2인 경우

⊙ 1의 눈이 한 번, 3의 눈이 한 번 나올 때, 점수 0, 0, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

⊙ 2의 눈이 두 번 나올 때, 점수 0, 0, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

⊙, ⊙ 각각에 대하여 4이상의 눈이 두 번 나오는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$ 이므로 이 경우의 수는

$$(12 + 6) \times 9 = 162$$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$1 + 36 + 162 = 199$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 원순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

이때 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우는 다음과 같이 생각할 수 있다.

(i) 2, 6이 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우

2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

그러므로 이 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

(ii) 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 이웃하게 배열되는 경우

3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이 각각에 대하여 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

그러므로 이 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

(iii) 2, 6이 각각 적힌 두 의자와 3, 4가 각각 적힌 두 의자가 모두 이웃하게

배열되는 경우

2, 6이 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자를 1개로 생각하여 의자 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

이 각각에 대하여 2, 6이 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸고, 3, 4가 각각 적힌 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$$2! \times 2! = 4$$

그러므로 이 경우의 수는

$$6 \times 4 = 24$$

(i)~(iii)에 의하여 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 경우가 있도록 배열하는 경우의 수는

$$48 + 48 - 24 = 72$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 - 72 = 48$$

정답 48

30. 출제의도 : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

3개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 5번 반복할 때 나오는 모든 경우의 수는

$$3^5$$

이때 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우는 다음과 같다.

(i) 한 개의 숫자만 나오는 경우

이 경우의 수는 3

(ii) 두 개의 숫자가 나오는 경우

1, 2가 적혀 있는 공이 나오는 경우
의 수는

$$2^5 - 2 = 30$$

1, 3이 적혀 있는 공이 나오는 경우

$$2^5 - 2 = 30$$

그러므로 이 경우의 수는

$$30 + 30 = 60$$

(i), (ii)에 의하여 확인한 5개의 수의

곱이 6의 배수가 아닌 경우의 수는

$$3 + 60 = 63$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{63}{3^5} = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

이므로

$$p + q = 27 + 20 = 47$$

정답 47

[선택: 미적분]

23. ② 24. ② 25. ④ 26. ③ 27. ④
28. ① 29. 17 30. 11

23. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1+1}{1} = 2 \end{aligned}$$

정답 ②

24. 출제의도 : 매개변수로 나타낸 함수의 도함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^t - \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t \quad \text{이므로} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{e^t - \sin t} \end{aligned}$$

따라서 $t=0$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{1}{1-0} = 1$$

정답 ②

25. 출제의도 : 두 접선이 이루는 예각의 크기 θ 에 대하여 $\tan\theta$ 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=e^{|x|}$ 는 y 축에 대하여 대칭이다.
 $x \geq 0$ 일 때 $y=e^x$ 이고 접점을 (t, e^t) 이라 하면 $y'=e^x$ 이므로 접선의 방정식은 $y-e^t=e^t(x-t)$
이 접선이 원점을 지나므로 $-e^t=e^t(-t), t=1$
따라서 접선의 기울기는 e 이고 이 접선과 y 축에 대하여 대칭인 접선의 기울기는 $-e$ 이다.

$$\tan\theta = \frac{-e-e}{1+(-e) \times e} = \frac{-2e}{1-e^2} = \frac{2e}{e^2-1}$$

정답 ④

26. 출제의도 : 한없이 반복되는 도형에서 넓이의 합을 등비급수를 활용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

$\angle O_1A_2O_2 = \frac{\pi}{4}$ 이므로 삼각형 $O_1A_2O_2$ 에

서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\sin \frac{\pi}{4}}, \quad \frac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\overline{O_2A_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 닮음비는 $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이의

비는 $1 : \frac{1}{2}$ 이다.

즉, 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$ 이고,

공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 방정식의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$e^x = k \sin x \text{ 에서 } \frac{1}{k} = \frac{\sin x}{e^x} \dots \textcircled{A} \text{이므로}$$

$$h(x) = \frac{\sin x}{e^x} \text{라 하면}$$

$$h'(x) = \frac{e^x \cos x - e^x \sin x}{e^{2x}} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$$

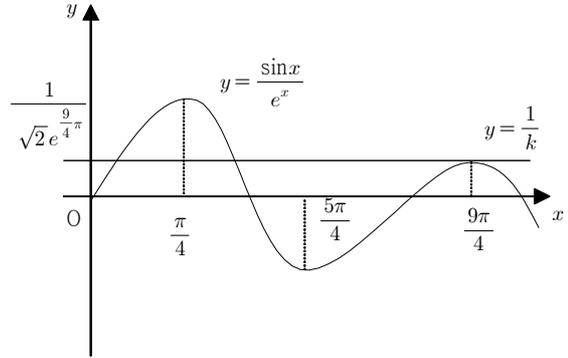
따라서 $x > 0$ 에서 $h'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \dots$$

이므로 함수 $y = h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | | | |
|---------|-----|-----|---------------------------------------|-----|---|-----|
| x | (0) | ... | $\frac{\pi}{4}$ | ... | $\frac{5}{4}\pi$ | ... |
| $h'(x)$ | 1 | + | 0 | - | 0 | + |
| $h(x)$ | 0 | ↗ | $\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ | ↘ | $-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$ | ↗ |

| | | | | | |
|---------|-----|--|-----|--|-----|
| x | ... | $\frac{9}{4}\pi$ | ... | $\frac{13}{4}\pi$ | ... |
| $h'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $h(x)$ | ↗ | $\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$ | ↘ | $-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$ | ↗ |



이때 ㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y = \frac{1}{k}$ 이 $x = \frac{9}{4}\pi$ 에서 곡선 $y = \frac{\sin x}{e^x}$ 와 접해야 하므로

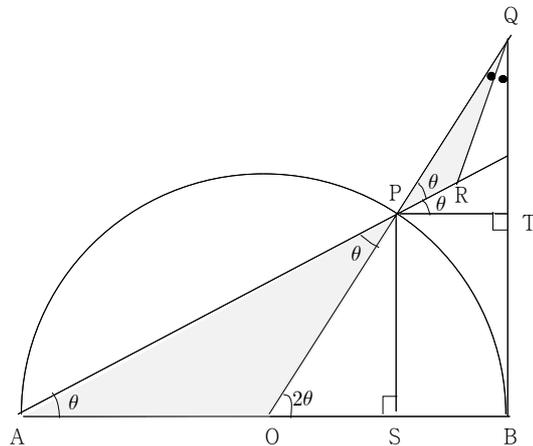
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$$

$$\text{따라서 } k = \sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$$

정답 ④

28. 출제의도 : 도형에서 여러 가지 조건을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(\pi - 2\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

또한, $\angle APO = \angle QPR = \theta$ 이므로
 점 P에서 두 선분 AB, BQ에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면
 $\angle QPT = 2\theta$
 즉, 점 R는 삼각형 PTQ의 내심이다.
 이때,

$$\overline{OS} = \cos 2\theta, \overline{PS} = \sin 2\theta, \overline{BQ} = \tan 2\theta$$

이므로

$$\overline{PT} = 1 - \cos 2\theta$$

$$\overline{QT} = \tan 2\theta - \sin 2\theta = \tan 2\theta(1 - \cos 2\theta)$$

이고

$$\overline{PQ} = \frac{1}{\cos 2\theta} - 1 = \frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta}$$

따라서 삼각형 PTQ의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times (1 - \cos 2\theta) \times \tan 2\theta(1 - \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} \times r \times \left\{ \frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} + 1 - \cos 2\theta \right. \\ & \quad \left. + \tan 2\theta(1 - \cos 2\theta) \right\} \end{aligned}$$

에서

$$r = \frac{(1 - \cos 2\theta)\sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta}$$

이다.

그러므로

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} \times \frac{(1 - \cos 2\theta)\sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(1 - \cos 2\theta)^2 \sin 2\theta}{\cos 2\theta(1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sin^4 2\theta \times \sin 2\theta}{\cos 2\theta(1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta)^2} \end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right)^4 \times 16 \right. \\ & \quad \left. \times \frac{1}{\cos 2\theta(1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta)^2} \right\} \\ &= 1^4 \times 16 \times \frac{1}{8} = 2 \end{aligned}$$

정답 ①

29. 출제의도 : 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = \frac{2t \ln x}{x} - 2x = \frac{2t \ln x - 2x^2}{x}$$

이고 $f(x)$ 는 $x = k$ 에서 극대이므로

$$2t \ln k - 2k^2 = 0$$

$$t \ln k = k^2$$

이때 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 했으므로

$$t \ln g(t) = \{g(t)\}^2 \dots \dots \textcircled{\ominus}$$

그런데 $g(\alpha) = e^2$ 이므로

$\textcircled{\ominus}$ 에 $t = \alpha$ 를 대입하면

$$\alpha \ln g(\alpha) = \{g(\alpha)\}^2$$

$$2\alpha = e^4, \alpha = \frac{e^4}{2}$$

또한, $\textcircled{\ominus}$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\ln g(t) + t \times \frac{g'(t)}{g(t)} = 2g(t) \times g'(t)$$

이 식에 $t = \alpha$ 를 대입하면

$$\ln g(\alpha) + \alpha \times \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} = 2g(\alpha) \times g'(\alpha)$$

$$2 + \frac{e^4}{2} \times \frac{g'(\alpha)}{e^2} = 2e^2 \times g'(\alpha)$$

$$\frac{3}{2} e^2 \times g'(\alpha) = 2$$

$$g'(\alpha) = \frac{4}{3e^2}$$

$$\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{e^4}{2} \times \frac{16}{9e^4} = \frac{8}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=8$ 이므로
 $p+q=17$

정답 17

30. 출제의도 : 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = \ln(1+e^{2x} - e^{-2t})$ 과 직선

$y = x+t$ 가 만나는 두 점을

$P(\alpha, \alpha+t)$, $Q(\beta, \beta+t)$ ($\alpha < \beta$)

로 놓으면

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + (\beta-\alpha)^2} \\ &= \sqrt{2}(\beta-\alpha) \end{aligned}$$

이때, α , β 는 방정식

$$\ln(1+e^{2x} - e^{-2t}) = x+t$$

의 서로 다른 두 실근이므로

$$1+e^{2x} - e^{-2t} = e^{x+t}$$

$$e^{2x} - e^t \times e^x + 1 - e^{-2t} = 0$$

$e^x = k(k > 0)$ 로 놓으면

$$k^2 - e^t k + 1 - e^{-2t} = 0$$

따라서,

$$k = \frac{e^t \pm \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

이므로

$$e^\alpha = \frac{e^t - \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

$$e^\beta = \frac{e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

즉

$$\alpha = \ln \frac{e^t - \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

$$\beta = \ln \frac{e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

이므로

$$\beta - \alpha$$

$$= \ln \frac{e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{e^t - \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}$$

$$= \ln \frac{(e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4})^2}{4(1 - e^{-2t})}$$

$$= 2\ln(e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}) - \ln 4 - \ln(1 - e^{-2t})$$

따라서

$$\begin{aligned} g(t) &= 2\ln(e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}) \\ &\quad - \ln 4 - \ln(1 - e^{-2t}) \end{aligned}$$

라 하면

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2 \times \frac{e^t + \frac{2e^{2t} - 8e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}}{e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}} \\ &\quad - \frac{2e^{-2t}}{1 - e^{-2t}} \end{aligned}$$

이므로

$$g'(\ln 2) = 2 \times \frac{2 + \frac{8-2}{2}}{2+1} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

즉, $f(t) = \sqrt{2}g(t)$ 에서

$$f'(\ln 2) = \sqrt{2}g'(\ln 2) = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

이므로 $p=3$, $q=8$

따라서 $p+q=11$

정답 11

[선택: 기하]

23. ② 24. ⑤ 25. ① 26. ② 27. ③
28. ③ 29. 80 30. 48

23. 출제의도 : 두 벡터의 평행 조건을 이용하여 주어진 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 벡터 $\vec{a}=(k+3, 3k-1)$ 과 $\vec{b}=(1, 1)$ 이 서로 평행하므로 적당한 실수 m 에 대하여 $\vec{a}=m\vec{b}$ 가 성립한다.
 $(k+3, 3k-1)=m(1, 1)$ 에서
 $k+3=m, 3k-1=m$
따라서 $k=2, m=5$

정답 ②

24. 출제의도 : 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2, \sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{2x}{8}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1$
이므로 이 직선의 x 절편은 4이다.

정답 ⑤

25. 출제의도 : 벡터로 나타내어진 식을 이용하여 주어진 점이 나타내는 도형을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$|\vec{OP}-\vec{OA}|=|\vec{AB}| \text{에서}$$

$$|\vec{AP}|=|\vec{AB}|$$

이때

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(-3-1)^2+(5-2)^2}=5$$

이므로

$$|\vec{AP}|=5$$

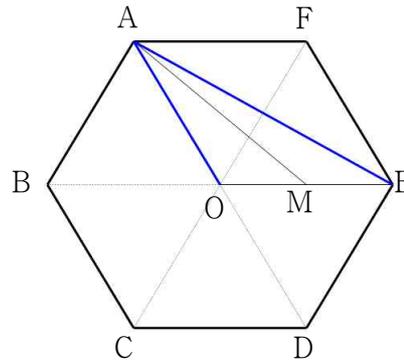
따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이므로 그 길이는 10π 이다.

정답 ①

26. 출제의도 : 도형에서 두 벡터의 합 의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 선분 AD와 BE의 교점을 O라 하고 선분 OE의 중점을 M이라 하면 $\vec{BC}=\vec{AO}$ 이므로



$$\vec{AE}+\vec{BC}=\vec{AE}+\vec{AO}=2\vec{AM} \dots \textcircled{7}$$

삼각형 AOM에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AM}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{OM}^2 - 2 \times \overline{AO} \times \overline{OM} \times \cos 120^\circ \\ &= 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{이므로 } \textcircled{7} \text{에서}$$

$$|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}| = 2\overline{AM} = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 쌍곡선 위의 점에서의 접선을 구하여 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $P(4, k)$ 는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의

점이므로

$$\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1 \dots \textcircled{7}$$

점 P 에서 쌍곡선에 그은 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$$

이므로 두 점 Q 와 R 의 좌표는 각각

$$Q\left(\frac{a^2}{4}, 0\right), R\left(0, -\frac{b^2}{k}\right)$$

따라서 삼각형 QOR 의 넓이는

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{4} \times \left| -\frac{b^2}{k} \right| = \frac{a^2 b^2}{8k}$$

삼각형 PRS 의 넓이는

$$A_2 = \frac{1}{2} \times \overline{PS} \times \overline{OS} = \frac{1}{2} \times k \times 4 = 2k$$

이므로

$$A_1 : A_2 = 9 : 4 \text{에서}$$

$$\frac{a^2 b^2}{8k} : 2k = 9 : 4$$

$$36k^2 = a^2 b^2 \dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하여 정리하면

$$\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{\frac{36k^2}{a^2}} = 1, \text{ 즉 } \frac{16}{a^2} - \frac{a^2}{36} = 1$$

$$a^4 + 36a^2 - 16 \times 36 = 0$$

$$(a^2 - 12)(a^2 + 48) = 0$$

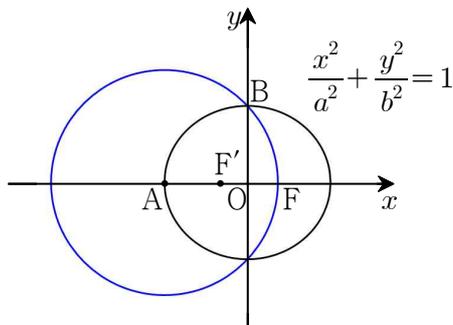
$a^2 = 12$ 에서 $a = 2\sqrt{3}$ 이므로 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a = 4\sqrt{3}$ 이다.

정답 ③

28. 출제의도 : 타원의 방정식에서 꼭짓점과 초점을 이용하여 장축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 타원의 중심을 원점으로 하고 장축이 x 축 위에 놓이도록 좌표축을 설정하자.



이때 타원의 장축의 길이가 $2a$ 이므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$)라 하면 두 초점의 좌표는

$$F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

이다.

주어진 타원이 음의 x 축과 만나는 점을 A , 양의 y 축과 만나는 점을 B 라 하면 두 점 A 와 B 의 좌표는 각각 $A(-a, 0)$, $B(0, b)$ 이다.

점 A 를 중심으로 하고 두 점 B 와 F 를

지나는 원의 반지름의 길이는 1이므로

$$\overline{AB}=1 \text{에서 } \sqrt{a^2+b^2}=1$$

$$b^2=1-a^2 \dots \textcircled{7}$$

$$\overline{AF}=1 \text{에서 } \sqrt{a^2-b^2}+a=1 \dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$\sqrt{a^2-(1-a^2)}=1-a$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$2a^2-1=1-2a+a^2$$

$$a^2+2a-2=0$$

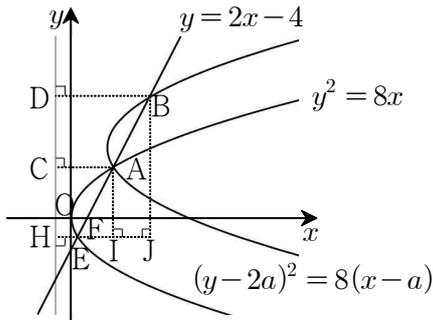
$$\text{따라서 } a=-1+\sqrt{3} \quad (a>0)$$

정답 ③

29. 출제의도 : 포물선의 정의를 이용하여 포물선 위의 점에서 준선까지의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

[풀이]



직선 $y=2x-4$ 가 포물선 $y^2=8x$ 와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, x 축과 만나는 점을 F라 하고, 점 E에서 직선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자.

또, 두 점 A, B에서 직선 HE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

점 F의 좌표는 $(2, 0)$ 이므로 포물선 $y^2=8x$ 의 초점과 일치한다.

따라서 $\overline{AF}=p$, $\overline{EF}=q$ 라 하면 포물선의

정의에 의하여

$$\overline{AC}=p, \overline{EH}=q$$

이때 포물선의 준선의 방정식이 $x=-2$ 이므로 두 점 A, E의 x 좌표는 각각 $p-2$, $q-2$ 이다.

선분 AI와 x 축의 교점을 P, 점 E에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$$\overline{FP}=p-4, \overline{FQ}=4-q$$

이므로 두 직각삼각형 AFP, EFQ에서

$$p=\sqrt{5}(p-4), \quad q=\sqrt{5}(4-q)$$

따라서

$$p=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)=5+\sqrt{5},$$

$$q=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)=5-\sqrt{5}$$

이므로

$$\overline{EI}=p-q=2\sqrt{5}$$

한편, 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$ 는 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동한 것이므로 두 점 A, B는 각각 두 점 E, A를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{AE}$ 이므로 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$$

$$=\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AE}$$

$$=\overline{AC}+\overline{BD}-(\overline{AF}+\overline{EF})$$

$$=\overline{AC}+\overline{BD}-(\overline{AC}+\overline{EH})$$

$$=\overline{BD}-\overline{EH}$$

$$=\overline{EJ}$$

$$=2 \times \overline{EI}$$

$$=2 \times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

따라서 $k=4\sqrt{5}$ 이므로

$$k^2=80$$

[다른 풀이]

직선 $y=2x-4$ 가 포물선 $y^2=8x$ 와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E, x 축과 만나는 점을 F라 하고, 점 E에서 직선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 또, 두 점 A, B에서 직선 HE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

점 F의 좌표는 $(2, 0)$ 이므로 포물선 $y^2=8x$ 의 초점과 일치한다.

이때 연립방정식

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

의 해는 $y^2 = 4(y+4)$ 즉, $y^2 - 4y - 16 = 0$ 에서 $y = 2 \pm 2\sqrt{5}$

$$y = 2 + 2\sqrt{5} \text{ 이면 } x = 3 + \sqrt{5}$$

$$y = 2 - 2\sqrt{5} \text{ 이면 } x = 3 - \sqrt{5}$$

이므로 두 점 A와 E의 좌표는 각각 $A(3 + \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$,

$E(3 - \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ 이다.

포물선 $(y-2a)^2 = 8(x-a)$ 은 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{AB} = \overline{AE}$

따라서 포물선의 정의에 의해

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AB} &= \overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AE} \\ &= \overline{AC} + \overline{BD} - (\overline{AF} + \overline{EF}) \\ &= \overline{AC} + \overline{BD} - (\overline{AC} + \overline{EH}) \\ &= \overline{BD} - \overline{EH} \\ &= \overline{EJ} \\ &= 2 \times \overline{EI} \\ &= 2 \times \{(3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5})\} \\ &= 4\sqrt{5} \\ k = 4\sqrt{5} \text{ 이므로 } k^2 &= 80 \end{aligned}$$

정답 80

30. 출제의도 : 벡터로 표현된 식을 이용하여 두 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ 또는 } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

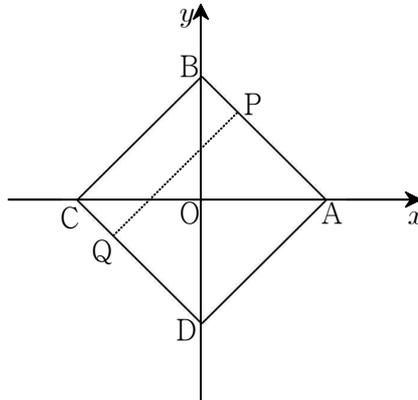
이므로 다음과 같이 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 즉 $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ 인 경우

두 조건 (나)와 (다)에서

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$$

이므로 점 P는 선분 AB 위의 점이고 점 Q는 선분 CD 위의 점이다.



점 P의 좌표를 $P(a, 2-a)$ ($0 \leq a \leq 2$)라 하면 점 Q의 좌표는

$$Q(a-2, -a)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq -2 \text{에서}$$

$$(2, 0) \cdot (a, 2-a) = 2a \geq -2$$

이므로

$$a \geq -1 \cdots \textcircled{7}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0 \text{에서}$$

$$(0, 2) \cdot (a, 2-a) = 2(2-a) \geq 0$$

이므로

$$a \leq 2 \cdots \textcircled{8}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq -2 \text{에서}$$

$$(2, 0) \cdot (a-2, -a) = 2(a-2) \geq -2$$

이므로

$$a \geq 1 \cdots \textcircled{\ominus}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0 \text{에서}$$

$$(0, 2) \cdot (a-2, -a) = -2a \leq 0$$

이므로

$$a \geq 0 \cdots \textcircled{\omin�}$$

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$$1 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{\omin�}$$

한편, 점 R(4, 4)에 대하여

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$$

$$= (a, 2-a) - (4, 4)$$

$$= (a-4, -a-2)$$

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$$

$$= (a-2, -a) - (4, 4)$$

$$= (a-6, -a-4)$$

이므로

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$$

$$= (a-4, -a-2) \cdot (a-6, -a-4)$$

$$= (a-4)(a-6) + (a+2)(a+4)$$

$$= 2a^2 - 4a + 32$$

$$= 2(a-1)^2 + 30$$

㉤에서

$$30 \leq \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \leq 32$$

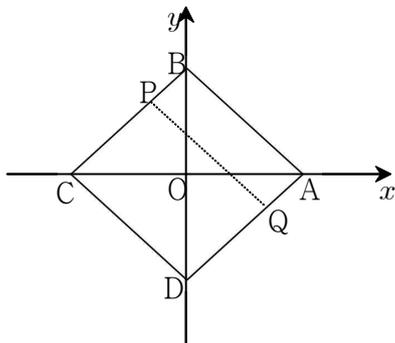
(ii) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 즉 $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AD}$ 인 경우

두 조건 (나)와 (다)에서

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$$

이므로 점 P는 선분 BC 위의 점이고 점

Q는 선분 AD 위의 점이다.



점 P의 좌표를 $P(a, a+2)$ ($-2 \leq a \leq 0$)

라 하면 점 Q의 좌표는

$$Q(a+2, a)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq -2 \text{에서}$$

$$(2, 0) \cdot (a, a+2) = 2a \geq -2$$

이므로

$$a \geq -1 \cdots \textcircled{\omin�}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0 \text{에서}$$

$$(0, 2) \cdot (a, a+2) = 2(a+2) \geq 0$$

이므로

$$a \geq -2 \cdots \textcircled{\otimes}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq -2 \text{에서}$$

$$(2, 0) \cdot (a+2, a) = 2(a+2) \geq -2$$

이므로

$$a \geq -3 \cdots \textcircled{\omin�}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0 \text{에서}$$

$$(0, 2) \cdot (a+2, a) = 2a \leq 0$$

이므로

$$a \leq 0 \cdots \textcircled{\otimes}$$

㉥, ㉦, ㉧, ㉨에서

$$-1 \leq a \leq 0 \cdots \textcircled{\otimes}$$

한편, 점 R(4, 4)에 대하여

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$$

$$= (a, a+2) - (4, 4)$$

$$= (a-4, a-2)$$

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$$

$$= (a+2, a) - (4, 4)$$

$$= (a-2, a-4)$$

이므로

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$$

$$= (a-4, a-2) \cdot (a-2, a-4)$$

$$= 2(a-4)(a-2)$$

$$= 2(a^2 - 6a + 8)$$

$$= 2(a-3)^2 - 2$$

㉩에서

$$16 \leq \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \leq 30$$

(i), (ii)에서

$$16 \leq \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \leq 32$$

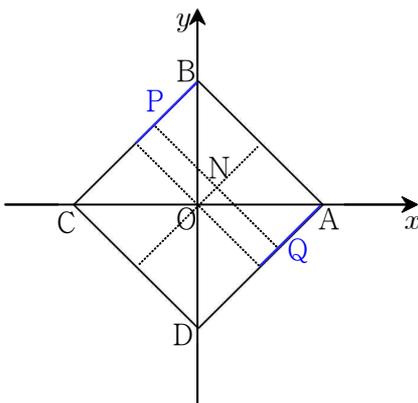
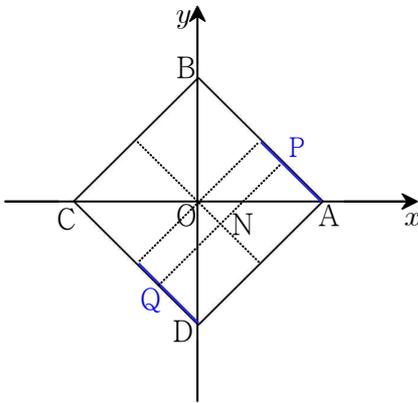
따라서 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 최댓값은 $M=32$, 최
솟값은 $m=16$ 이므로

$$M+m=48$$

정답 48

[다른 풀이]

위의 풀이에서 두 점 P, Q가 지나는 영
역은 다음 그림의 붉은 선분 위이다.



선분 PQ의 중점을 N이라 하면 조건
(가)에 의하여

$$\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NQ} = \mathbf{0},$$

$$\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ} = |\overrightarrow{NP}| |\overrightarrow{NQ}| \cos \pi = -\overrightarrow{NP}^2$$

이므로

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$$

$$= (\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP}) \cdot (\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NQ})$$

$$= \overrightarrow{RN} \cdot \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{RN} \cdot \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ}$$

$$= |\overrightarrow{RN}|^2 + \overrightarrow{RN} \cdot (\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{NP}) + \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ}$$

$$= \overrightarrow{RN}^2 + 0 - \overrightarrow{NP}^2$$

이때 항상 $\overrightarrow{PQ} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \sqrt{2}$$

따라서

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RN}^2 - 2$$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 최댓값과 최솟값은
 \overrightarrow{RN} 의 최댓값과 최솟값에 의하여 결정된
다.

\overrightarrow{RN} 이 최대일 때의 두 점 P, Q의 좌표
는 각각 (2,0), (0,-2)이므로

$$N(1,-1)$$

따라서

$$\overrightarrow{RN} = \sqrt{(4-1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{34}$$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 최댓값은

$$M = (\sqrt{34})^2 - 2 = 32$$

\overrightarrow{RN} 이 최소일 때의 두 점 P, Q의 좌표
는 각각 (0,2), (2,0)이므로

$$N(1,1)$$

따라서

$$\overrightarrow{RN} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18}$$

이므로 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$ 의 최솟값은

$$m = (\sqrt{18})^2 - 2 = 16$$

이상에서

$$M+m=32+16=48$$