

목록

02_수학_정답및해설.....	1
02_확률과통계_정답및해설.....	4
02_미적분_정답및해설.....	5
02_기하_정답및해설.....	7

수학 영역

정답

1	⑤	2	②	3	①	4	②	5	③
6	④	7	②	8	④	9	④	10	③
11	⑤	12	①	13	③	14	⑤	15	①
16	2	17	13	18	16	19	4	20	8
21	180	22	121						

해설

- [출제의도] 지수 계산하기
 $3^{2\sqrt{2}} \times 9^{1-\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2} + (2-2\sqrt{2})} = 3^2 = 9$
- [출제의도] 등비수열 계산하기
 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면
 $r = \frac{a_3}{a_2} = 2$ 이므로 $a_5 = a_3 \times r^2 = 4$
- [출제의도] 미분계수 계산하기
 $f'(x) = 3x^2 + 2$ 이므로 $f'(1) = 5$
- [출제의도] 함수의 극한 이해하기
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2$
- [출제의도] 함수의 연속 이해하기
 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2-} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 - ax + 3) = f(2)$
 $1 = 7 - 2a$
 따라서 $a = 3$
- [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos(\pi + \theta) = \cos\theta + \cos\theta = 2\cos\theta$
 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \frac{3}{5}$
 따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos(\pi + \theta) = \frac{6}{5}$
- [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기
 $a_1 = \frac{1}{2}$ 이므로
 $a_2 = -2 \times \frac{1}{2} + 1 = 0$
 $a_3 = -2 \times 0 + 1 = 1$
 $a_4 = -2 \times 1 + 1 = -1$
 $a_5 = -1 + 1 = 0$
 \vdots
 이때, $a_{n+3} = a_n$ ($n \geq 2$) 이므로
 $a_{10} = a_7 = a_4 = -1$
 $a_{20} = a_{17} = a_{14} = \dots = a_2 = 0$
 따라서 $a_{10} + a_{20} = -1 + 0 = -1$

- [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 문제 해결하기
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$ 이므로 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, f(1) = 0$
 $f(x) = (x-1)(2x+a)$ (a 는 상수)라 하면
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+a)}{x-1} = 2+a = 3, a = 1$
 $f(x) = (x-1)(2x+1)$
 따라서 $f(3) = 14$

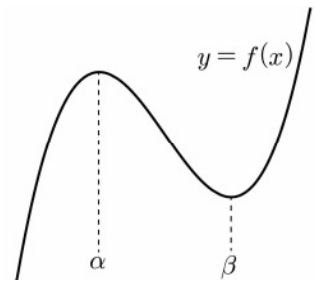
- [출제의도] 정적분 이해하기
 $\int_0^1 f'(x)dx = \int_0^2 f'(x)dx = 0$
 $f(1) - f(0) = f(2) - f(0) = 0$
 $f(0) = f(1) = f(2) = k$ (k 는 상수)
 $f(x) = x(x-1)(x-2) + k = x^3 - 3x^2 + 2x + k$
 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$
 따라서 $f'(1) = -1$

- [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기
 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 x_1 ($0 < x_1 < 1$), x_2, x_3 이라 하면
 삼각함수 $y = \sin\frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 4이므로
 $x_2 = 2 - x_1, x_3 = x_1 + 4$
 $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (2 - x_1) + (x_1 + 4)$
 $= x_1 + 6 = \frac{25}{4}$
 $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 2 - x_1 = \frac{7}{4}$
 따라서 $\overline{AB} = x_2 - x_1 = \frac{3}{2}$

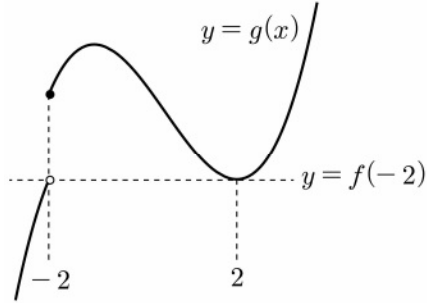
- [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기
 두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(a, \log_2 2a), B(b, \log_2 4b)$ ($a < b$)라 하자.
 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로
 $\frac{\log_2 4b - \log_2 2a}{b-a} = \frac{1}{2}$ 에서
 $\log_2 4b - \log_2 2a = \frac{1}{2}(b-a)$
 $\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + (\log_2 4b - \log_2 2a)^2}$
 $= \sqrt{(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2}$
 $= \frac{\sqrt{5}}{2} \times (b-a) = 2\sqrt{5}$
 $b-a = 4 \dots \textcircled{7}$
 $\log_2 4b - \log_2 2a = \log_2 \frac{2b}{a} = 2, b = 2a \dots \textcircled{8}$
 두 식 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하면 $a = 4, b = 8$
 $A(4, 3), B(8, 5), C(4, 0)$
 따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

- [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기
 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= \sum_{k=1}^n \frac{3S_k}{k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3S_k}{k+2} = \frac{3S_n}{n+2}$
 이므로 $3S_n = (n+2) \times a_n$ ($n \geq 2$)이다.
 $S_1 = a_1$ 에서 $3S_1 = 3a_1$ 이므로
 $3S_n = (n+2) \times a_n$ ($n \geq 1$)이다.
 $3a_n = 3(S_n - S_{n-1})$
 $= (n+2) \times a_n - (n+1) \times a_{n-1}$ ($n \geq 2$)
 $(n-1) \times a_n = (n+1) \times a_{n-1}$ 이고 $a_1 \neq 0$ 이므로
 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq 0$
 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$ ($n \geq 2$)
 따라서
 $a_{10} = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \dots \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9}$
 $= 2 \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \dots \times \frac{10}{8} \times \frac{11}{9} = 110$
 $f(n) = n+1, g(n) = \frac{n+1}{n-1}, p = 110$
 따라서 $\frac{f(p)}{g(p)} = \frac{111}{\frac{111}{109}} = 109$

- [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기
 함수 $f(x)$ 가 극값을 가지므로
 함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값을 갖고
 $x = \beta$ 에서 극솟값을 갖는다고 하자.



- $\alpha < \beta \leq -2$ 인 경우
 $x \geq -2$ 에서 함수 $g(x)$ 는 증가한다.
 $f(-2) < g(-2) < g(2)$
 $g(2) \neq f(-2)$ 이므로 모순
- $\alpha < -2 < \beta$ 인 경우
 방정식 $g(x) = f(-2)$ 의 실근이 열린구간 $(-\infty, \alpha)$ 에서 존재하므로 모순
- $\alpha = -2$ 인 경우
 방정식 $g(x) = f(-2)$ 의 실근이 2뿐이므로
 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값을 갖는다.
 $f'(x) = 3(x+2)(x-2)$
 $f(x) = x^3 - 12x + \frac{1}{2}$
 $g(2) \neq f(-2)$ 이므로 모순
- $-2 < \alpha < \beta$ 인 경우
 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2) = f(-2)$ 이므로 $f(2) + 8 = f(-2)$
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \frac{1}{2}$ (a, b 는 상수) 라 하자.
 $8 + 4a + 2b + \frac{1}{2} + 8 = -8 + 4a - 2b + \frac{1}{2}$
 $b = -6, f(x) = x^3 + ax^2 - 6x + \frac{1}{2}$
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 6$
 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 극솟값을 가지므로
 $f'(2) = 12 + 4a - 6 = 0, a = -\frac{3}{2}$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{2}$ 이므로
 $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$
 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값을 갖는다.
 따라서 극댓값은 $f(-1) = 4$

14. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ 이므로
 $\cos(\angle CBA) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{7}$
 $\sin(\angle CBA) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)
 ㄴ. $\angle CBA = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 라 하면
 $\angle ADC = \pi - \theta$
 $AC = AB \times \sin \theta = 14 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} = 4\sqrt{10}$
 $AD = k$ ($k > 0$) 이라 하면
 삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여
 $(4\sqrt{10})^2 = k^2 + 7^2 - 2 \times k \times 7 \times \cos(\pi - \theta)$
 $= k^2 + 49 + 14k \cos \theta$
 $= k^2 + 6k + 49$
 $k^2 + 6k - 11 = 0$ 이므로
 $AD = -3 + \sqrt{9 + 111} = -3 + 2\sqrt{30}$ (참)
 ㄷ. 삼각형 ACD 의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD 의 넓이가 최대이므로 점 D 는 선분 AC 의 수직이등분선이 호 AC 와 만나는 점이다.
 그러므로 $AD = CD$
 $AD = x$ ($x > 0$) 이라 하면
 삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여
 $(4\sqrt{10})^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \cos(\pi - \theta)$
 $= 2x^2 + 2x^2 \times \frac{3}{7} = \frac{20}{7}x^2$
 $x^2 = 56$ 이므로 $AD = 2\sqrt{14}$
 사각형 ABCD 의 넓이의 최댓값은
 $\frac{1}{2} \times AD \times CD \times \sin(\pi - \theta) + \frac{1}{2} \times AC \times BC$
 $= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{14})^2 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times 6$
 $= 8\sqrt{10} + 12\sqrt{10} = 20\sqrt{10}$ (참)
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 활용하여 문제 해결하기
 함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하므로 $x = 0$ 에서 연속이다.
 $g(0) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = f(2) = 0$
 $f(x) = (x-2)(x-p)$ (p 는 상수) 라 하면

$f(x+2) = x(x+2-p)$
 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = 2-p$
 함수 $xf(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면
 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(0) = 0$
 $g'(0) = 2-p = 0, p = 2$
 $f(x) = (x-2)^2$
 그러므로

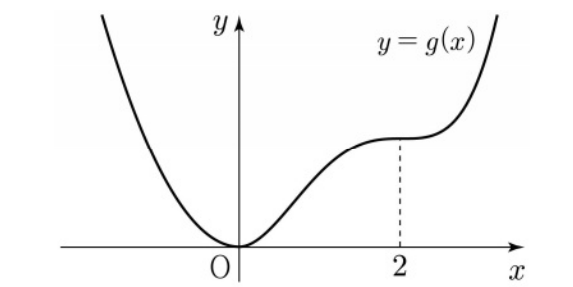
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ \int_0^x t(t-2)^2 dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x(x-2)^2 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

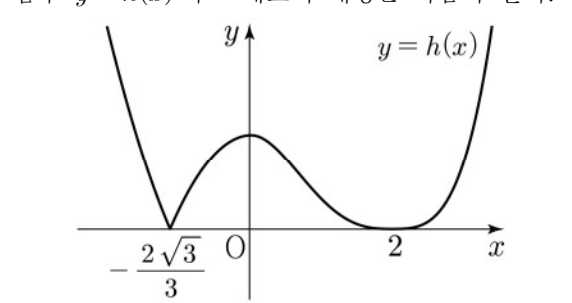
함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a) = 0$ 인 경우
 $h(x) = g(x)$ 이므로 함수 $h(x)$ 가 $x = k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 0
 (ii) $0 < g(a) < g(2)$ 또는 $g(2) < g(a)$ 인 경우
 방정식 $h(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} \neq \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha}$
 $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{h(x) - h(\beta)}{x - \beta} \neq \lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{h(x) - h(\beta)}{x - \beta}$
 함수 $h(x)$ 는 $x = \alpha, x = \beta$ 에서 미분가능하지 않다.
 함수 $h(x)$ 가 $x = k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 2
 (iii) $g(a) = g(2)$ 인 경우
 방정식 $h(x) = 0$ 의 두 근을 γ ($\gamma < 0$), 2 라 하면
 $\lim_{x \rightarrow \gamma^-} \frac{h(x) - h(\gamma)}{x - \gamma} \neq \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \frac{h(x) - h(\gamma)}{x - \gamma}$
 함수 $h(x)$ 는 $x = \gamma$ 에서 미분가능하지 않다.
 $0 < x < 2$ 일 때, $h(x) = g(2) - g(x)$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = -g'(2) = 0$
 $x > 2$ 일 때, $h(x) = g(x) - g(2)$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = g'(2) = 0$
 함수 $h(x)$ 는 $x = 2$ 에서 미분가능하다.
 함수 $h(x)$ 가 $x = k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 1

$g(2) = \int_0^2 t(t-2)^2 dt = \frac{4}{3}$ 이므로
 $g(\gamma) = \gamma^2 = \frac{4}{3}, \gamma = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 따라서 함수 $h(x)$ 가 $x = k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수가 1 이 되도록 하는 모든 a 의 값의 곱은 $2 \times \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

[참고]
 함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



16. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 계산하기

$$\log_3 7 \times \log_7 9 = \log_3 7 \times \frac{\log_3 9}{\log_3 7} = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2$$

17. [출제의도] 부정적분 이해하기

$$f(x) = \int (6x^2 - 2x - 1) dx = 2x^3 - x^2 - x + C$$

(단, C 는 적분상수)
 $f(1) = 2 - 1 - 1 + C = 3, C = 3$
 $f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 3$
 따라서 $f(2) = 16 - 4 - 2 + 3 = 13$

18. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 이해하기

시각 t 에서의 점 P 의 위치를 $x(t)$ 라 하면
 시각 $t = 3$ 에서의 점 P 의 위치는
 $x(3) = x(0) + \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (3t^2 + 6t - a) dt$
 $= [t^3 + 3t^2 - at]_0^3 = 54 - 3a = 6$
 따라서 $a = 16$

19. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$n = 3$ 일 때 $f(3) = 1$
 $n = 4$ 일 때 $2n^2 - 9n < 0$ 이므로 $f(4) = 0$
 $n = 5$ 일 때 $f(5) = 1$
 $n = 6$ 일 때 $2n^2 - 9n > 0$ 이므로 $f(6) = 2$
 따라서
 $f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 1 + 0 + 1 + 2 = 4$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$g'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(t) dt$
 $h(x) = \int_0^x f(t) dt$ 라 하면 $h(0) = 0$
 조건 (나) 에 의하여
 방정식 $h(x) = 0$ 의 실근은 0 과 3 이므로

(i) $h(x) = ax^2(x-3)$ (a 는 상수) 라 하면
 $g'(x) = 2ax^3(x-3)$ 이고 함수 $g(x)$ 는
 $x=0, x=3$ 에서 극값을 가지므로 모순
 (ii) $h(x) = ax(x-3)^2$ (a 는 상수) 라 하면
 $g'(x) = 2ax^2(x-3)^2$ 이므로
 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.
 $h'(x) = f(x)$
 $= a(3x^2 - 12x + 9) = 3a(x-1)(x-3)$
 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=1$
 $f(x) = 3(x-1)(x-3)$

따라서

$$\int_0^3 |f(x)| dx$$

$$= 3 \int_0^1 |(x-1)(x-3)| dx$$

$$= 3 \int_0^1 (x-1)(x-3) dx - 3 \int_1^3 (x-1)(x-3) dx$$

$$= 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 - 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3$$

$$= 3 \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) - 3 \left(9 - 18 + 9 - \frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = 8$$

21. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여

$$a_{2n-1} + a_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{2(n-1)} a_k$$

$$= 17n - 17(n-1) = 17 \quad (n \geq 2)$$

조건 (나)에 의하여

$$|a_{2n} - a_{2n-1}| = 2(2n-1) - 1 = 4n - 3 \quad (n \geq 1)$$

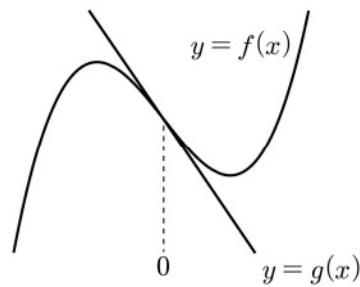
(i) $n=2$ 인 경우
 $|a_4 - a_3| = 5$ 이고 $a_3 + a_4 = 17$
 $(a_3, a_4) = (6, 11)$ 또는 $(a_3, a_4) = (11, 6)$
 조건 (나)에 의하여
 $|a_3 - a_2| = |a_3 - 9| = 3$ 이므로
 $a_3 = 6, a_4 = 11$
 (ii) $n=3$ 인 경우
 $|a_6 - a_5| = 9$ 이고 $a_5 + a_6 = 17$
 $(a_5, a_6) = (4, 13)$ 또는 $(a_5, a_6) = (13, 4)$
 조건 (나)에 의하여
 $|a_5 - a_4| = |a_5 - 11| = 7$ 이므로
 $a_5 = 4, a_6 = 13$

(i), (ii)와 같은 방법을 반복하면
 $a_8 = 15, a_{10} = 17, \dots, a_{20} = 27$ 이므로
 $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$ 의 값은 첫째항이 9이고 공차가 2인
 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같다.
 따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \frac{10 \times (18 + 9 \times 2)}{2} = 180$

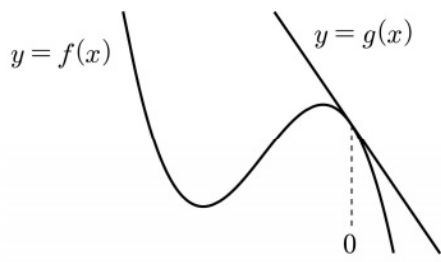
22. [출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

$f(0) = 0$ 이므로
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (a, b, c 는 상수) 라 하면
 $f'(0) = c, g(x) = cx$
 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기 c 에 대하여
 (i) $c = 0$ 이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
 (ii) $c > 0$ 이면 $h(12) > 0$ 이므로
 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

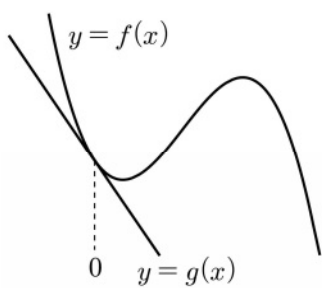
(iii) $c < 0, a > 0$ 이면 두 함수 $y = f(x)$ 와
 $y = g(x)$ 의 그래프가 다음과 같으므로
 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



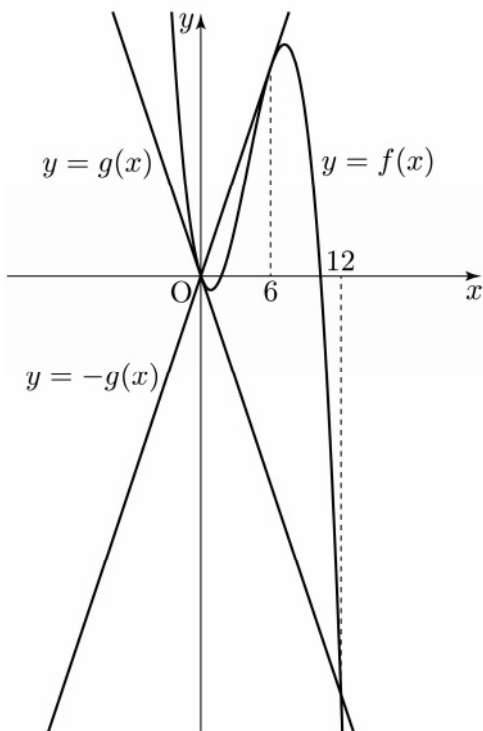
(iv) $c < 0, a < 0$ 이면
 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가
 다음과 같은 경우에는 조건 (가)를
 만족시키지 않는다.



그러므로 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
 그래프가 다음과 같은 경우에만
 조건 (가), (나)를 만족시킨다.



조건 (가)에 의하여
 $f(x) + g(x) = ax(x-k)^2 \dots \textcircled{A}$
 조건 (나)에 의하여
 $-f(x) + g(x) = -ax^2(x-12) \dots \textcircled{B}$
 두 식 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하면
 $2g(x) = 2a(6-k)x^2 + ak^2x$
 $6-k=0, k=6$
 $g(x) = 18ax$
 $f(x) = ax(x-6)^2 - 18ax$
 $= ax(x^2 - 12x + 18)$



방정식 $x^2 - 12x + 18 = 0$ 의 두 근을
 α, β ($\alpha < \beta$) 라 하면
 $\alpha = 6 - 3\sqrt{2}, \beta = 6 + 3\sqrt{2}$
 함수 $h(x)$ 는 다음과 같다.

$$h(x) = \begin{cases} ax(x-6)^2 & (x < 0 \text{ 또는 } \alpha \leq x < \beta) \\ -ax^2(x-12) & (0 \leq x < \alpha \text{ 또는 } x \geq \beta) \end{cases}$$

$\alpha < 3 < \beta$ 이므로
 $h(3) = a \times 3 \times (3-6)^2 = 27a = -\frac{9}{2}$
 $a = -\frac{1}{6}, c = -3$

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x(x-6)^2 & (x < 0 \text{ 또는 } \alpha \leq x < \beta) \\ \frac{1}{6}x^2(x-12) & (0 \leq x < \alpha \text{ 또는 } x \geq \beta) \end{cases}$$

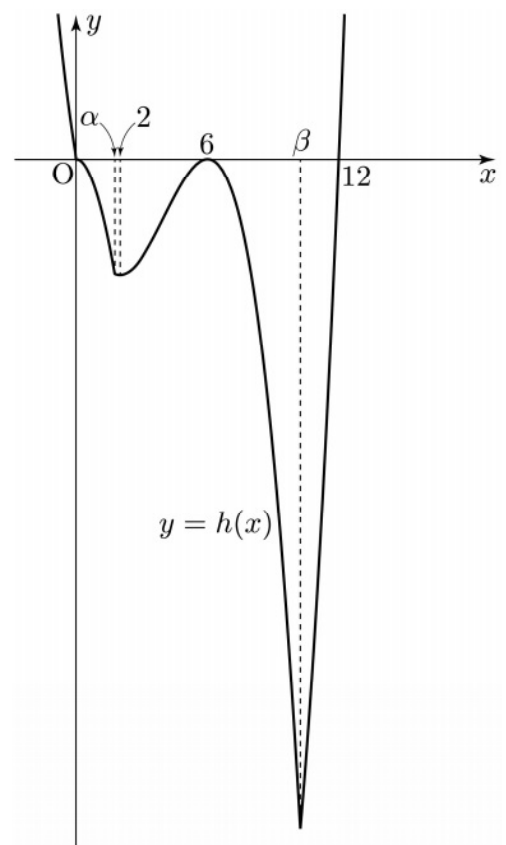
$\alpha = 6 - 3\sqrt{2}, \beta = 6 + 3\sqrt{2}$ 이므로
 $\alpha < 6 < \beta < 11$

$$h(6) = 0, h(11) = \frac{1}{6} \times 11^2 \times (-1) = -\frac{121}{6}$$

따라서
 $k \times \{h(6) - h(11)\} = 6 \times \left\{ 0 - \left(-\frac{121}{6} \right) \right\} = 121$

[참고]

함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



확률과 통계 정답

23	②	24	④	25	③	26	④	27	⑤
28	②	29	5	30	133				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 이항계수 계산하기

$(4x+1)^6$ 의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r \times (4x)^{6-r} \times 1^r = {}_6C_r \times 4^{6-r} \times x^{6-r}$ ($r=0, 1, 2, \dots, 6$)
 x 의 계수는 $r=5$ 일 때 ${}_6C_5 \times 4 = {}_6C_1 \times 4 = 24$

24. [출제의도] 이항분포의 분산 이해하기

이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 에서 $E(X) = n \times \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$,

$$V(X) = n \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2n}{9}$$

$$E(3X-1) = 3E(X) - 1 = 3 \times \frac{n}{3} - 1 = 17$$

$$n = 18$$

$$\text{따라서 } V(X) = \frac{2 \times 18}{9} = 4$$

25. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

8개의 공 중 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_8C_4$

(i) 꺼낸 공 중 검은 공이 0개일 확률은

$$\frac{{}_4C_4}{{}_8C_4} = \frac{1}{70}$$

(ii) 꺼낸 공 중 검은 공이 1개일 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_4C_3}{{}_8C_4} = \frac{16}{70}$$

따라서 꺼낸 공 중 검은 공이 2개 이상일 확률은

$$1 - \left(\frac{1}{70} + \frac{16}{70}\right) = \frac{53}{70}$$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

(i) 한 개의 문자를 3개 선택하는 경우

$${}_3C_1 \times \frac{5!}{3!} = 60$$

(ii) 두 개의 문자를 각각 2개씩 선택하는 경우

$${}_3C_2 \times \frac{5!}{2! \times 2!} = 90$$

따라서 경우의 수는 $90 + 60 = 150$

27. [출제의도] 확률의 곱셈법칙 이해하기

3개의 동전을 동시에 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 3인 사건을 X , 주머니에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 사건을 Y 라 하자.

$$P(X) = \frac{1}{8}, P(X^c) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

주머니 A에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우는 다음과 같다.

(i) 1이 적혀 있는 카드를 2장 꺼내는 경우의 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$$

(ii) 1과 2가 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우의 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

(iii) 2와 3이 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우의 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

$$P(Y|X) = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{3}{5}$$

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y|X) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$$

주머니 B에서 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우는 3과 4가 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우이다.

$$P(Y|X^c) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

$$P(X^c \cap Y) = P(X^c)P(Y|X^c)$$

$$= \frac{7}{8} \times \frac{4}{15} = \frac{7}{30}$$

$$P(Y) = P(X \cap Y) + P(X^c \cap Y)$$

$$= \frac{3}{40} + \frac{7}{30} = \frac{37}{120}$$

28. [출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기

조건 (가)에서 $\sqrt{f(1) \times f(2) \times f(3)}$ 의 값이 자연수인 경우는 세 수 $f(1), f(2), f(3)$ 중 하나의 수가 1 또는 4이고 나머지 두 수가 서로 같은 경우이다.

조건 (나)에 의하여

(i) $f(3) = 1$ 인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 은 $(1, 1, 1)$
 순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$ 의 개수는 ${}_5H_3$

그러므로 $1 \times {}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$

(ii) $f(3) = 2$ 인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 은 $(1, 2, 2)$
 순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$ 의 개수는 ${}_4H_3$

그러므로 $1 \times {}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

(iii) $f(3) = 3$ 인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 은 $(1, 3, 3)$
 순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$ 의 개수는 ${}_3H_3$

그러므로 $1 \times {}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$

(iv) $f(3) = 4$ 인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 은 $(1, 1, 4), (1, 4, 4), (2, 2, 4), (3, 3, 4), (4, 4, 4)$
 순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$ 의 개수는 ${}_2H_3$

그러므로 $5 \times {}_2H_3 = 5 \times {}_4C_3 = 20$

(v) $f(3) = 5$ 인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 은 $(1, 5, 5), (4, 5, 5)$
 순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$ 의 개수는 ${}_1H_3$

그러므로 $2 \times {}_1H_3 = 2 \times {}_3C_3 = 2$

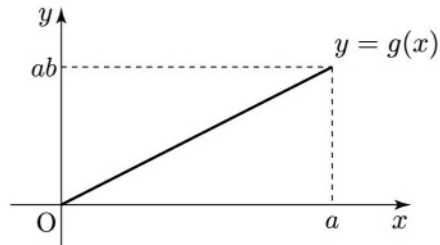
따라서 (i) ~ (v)에 의하여 함수 f 의 개수는 $35 + 20 + 10 + 20 + 2 = 87$

29. [출제의도] 연속확률변수의 확률밀도함수의 성질을 활용하여 문제 해결하기

확률밀도함수의 성질에 의하여

$$P(0 \leq X \leq a) = 1 \text{에서 } ab = 1 \dots \textcircled{1}$$

$$g(x) = P(0 \leq X \leq x) = bx$$



확률밀도함수의 성질에 의하여

$$P(0 \leq Y \leq a) = \frac{1}{2} \times a \times ab = \frac{a^2b}{2} = 1 \dots \textcircled{2}$$

두 식 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면 $a = 2, b = \frac{1}{2}$

그러므로 $g(x) = \frac{1}{2}x$ 에서

$$P(0 \leq Y \leq c) = \frac{1}{2} \times c \times \frac{c}{2} = \frac{c^2}{4} = \frac{1}{2}, c^2 = 2$$

$$\text{따라서 } (a+b) \times c^2 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \times 2 = 5$$

30. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

정육면체 모양의 상자를 한 번 던져 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 각각 1, 2일

확률은 각각 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 이다.

$a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6$ 일 사건을 A ,
 $a_1 = a_4 = 1$ 일 사건을 B 라 하자.

$a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6 \geq 3$

(I) $a_1 + a_2 + a_3 = 4$ 인 경우

$$a_1 + a_2 + a_3 = 4 \text{ 일 확률은 } {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 3 \text{ 일 확률은 } {}_3C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}$$

$$\text{그러므로 } {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3^3} = \frac{6}{3^6}$$

(II) $a_1 + a_2 + a_3 = 5$ 인 경우

$$a_1 + a_2 + a_3 = 5 \text{ 일 확률은 } {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$3 \leq a_4 + a_5 + a_6 \leq 4 \text{ 일 확률은}$$

$${}_3C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3^3}$$

$$\text{그러므로 } {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{7}{3^3} = \frac{84}{3^6}$$

(III) $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ 인 경우

$$a_1 + a_2 + a_3 = 6 \text{ 일 확률은 } {}_3C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$3 \leq a_4 + a_5 + a_6 \leq 5 \text{ 일 확률은}$$

$${}_3C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) + {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{19}{3^3}$$

$$\text{그러므로 } {}_3C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{19}{3^3} = \frac{152}{3^6}$$

(I), (II), (III)에 의하여

$$P(A) = \frac{6}{3^6} + \frac{84}{3^6} + \frac{152}{3^6} = \frac{242}{3^6}$$

$a_1 = a_4 = 1$ 이면 $a_2 + a_3 > a_5 + a_6 \geq 2$ 이다.

(i) $a_1 = a_4 = 1$ 이고 $a_2 + a_3 = 3$ 인 경우

$$a_1 = a_4 = 1 \text{ 일 확률은 } {}_2C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$a_2 + a_3 = 3 \text{ 일 확률은 } {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3^2}$$

$$a_5 + a_6 = 2 \text{ 일 확률은 } {}_2C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{그러므로 } \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{4}{3^2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3^6}$$

(ii) $a_1 = a_4 = 1$ 이고 $a_2 + a_3 = 4$ 인 경우

$$a_1 = a_4 = 1 \text{ 일 확률은 } {}_2C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$a_2 + a_3 = 4 \text{ 일 확률은 } {}_2C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$2 \leq a_5 + a_6 \leq 3 \text{ 일 확률은}$$

$${}_2C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3^2}$$

$$\text{그러므로 } \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{5}{3^2} = \frac{20}{3^6}$$

(i), (ii)에 의하여

$$P(A \cap B) = \frac{4}{3^6} + \frac{20}{3^6} = \frac{24}{3^6}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{24}{242} = \frac{12}{121}$$

따라서 $p = 121, q = 12$ 이므로 $p + q = 133$

미적분 정답

23	④	24	③	25	③	26	②	27	②
28	①	29	4	30	129				

미적분 해설

23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 5n^2 + 5} - n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^4 + 5n^2 + 5} - n^2)(\sqrt{n^4 + 5n^2 + 5} + n^2)}{\sqrt{n^4 + 5n^2 + 5} + n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 5}{\sqrt{n^4 + 5n^2 + 5} + n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{5}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{5}{n^4}} + 1} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

24. [출제의도] 치환적분법 이해하기

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \ln x \, dx - \int_1^e \frac{2}{x^2} \ln x \, dx \\ &= \int_1^e \frac{3}{x} \ln x \, dx \\ & \ln x = t \text{ 라 하면 } \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \\ & x = 1 \text{ 일 때 } t = 0, \quad x = e \text{ 일 때 } t = 1 \\ & \text{따라서 } \int_1^e \frac{3}{x} \ln x \, dx = 3 \int_0^1 t \, dt \\ &= 3 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

25. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

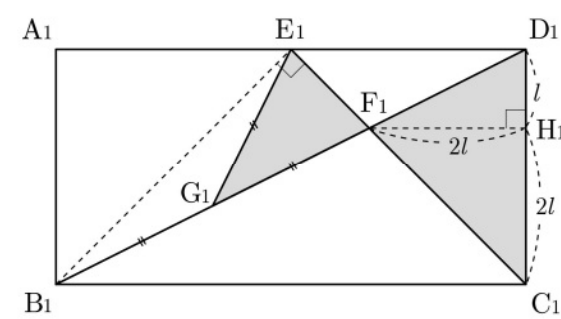
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2t \ln t + t + 3 \\ \frac{dy}{dt} &= 6e^{t-1} + 6te^{t-1} = 6e^{t-1}(1+t) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6e^{t-1}(1+t)}{2t \ln t + t + 3} \quad (2t \ln t + t + 3 \neq 0) \end{aligned}$$

따라서 $t = 1$ 일 때, $\frac{dy}{dx} = \frac{6 \times 2}{1 + 3} = \frac{12}{4} = 3$

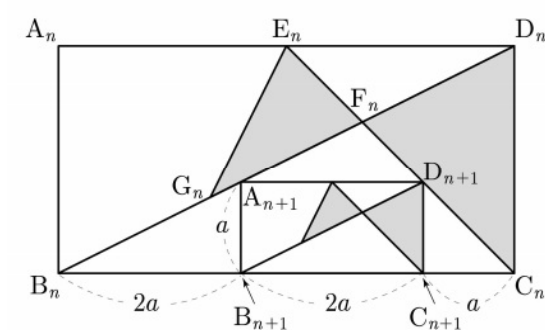
26. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = \frac{1}{3} \text{ 에서 } f(2) = 2, \quad f'(2) = \frac{1}{3} \\ & f(x) \text{ 는 함수 } g(x) \text{ 의 역함수이므로 } g(2) = 2 \\ & g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(2)} = 3 \\ & f(2) \neq 0 \text{ 이고 두 함수 } f(x), g(x) \text{ 는 } \\ & \text{양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로} \\ & \text{함수 } h(x) \text{ 는 } x = 2 \text{ 에서 미분가능하다.} \\ & h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2} \\ & h'(2) = \frac{g'(2)f(2) - g(2)f'(2)}{\{f(2)\}^2} \\ &= \frac{3 \times 2 - 2 \times \frac{1}{3}}{2^2} = \frac{6 - \frac{2}{3}}{4} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

27. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기



점 F_1 에서 선분 C_1D_1 에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하자.
 $\overline{D_1H_1} = l (l > 0)$ 이라 하면 $\overline{F_1H_1} = \overline{C_1H_1} = 2l$
 $\overline{C_1D_1} = 3l = 1$
 $l = \frac{1}{3}$ 이므로 $\overline{D_1H_1} = \frac{1}{3}, \overline{F_1H_1} = \frac{2}{3}$
삼각형 $C_1D_1F_1$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
 $\angle B_1E_1F_1 = \frac{\pi}{2}$ 이고, $\overline{G_1E_1} = \overline{G_1F_1}$ 이므로
점 G_1 은 삼각형 $B_1F_1E_1$ 의 외접원의 중심이다.
 $\overline{B_1G_1} = \overline{G_1F_1}$ 이므로 삼각형 $G_1F_1E_1$ 의 넓이는
삼각형 $B_1F_1E_1$ 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이다.
 $\overline{B_1E_1} = \sqrt{2}, \overline{E_1F_1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로
삼각형 $G_1F_1E_1$ 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{B_1E_1} \times \overline{E_1F_1} \right) = \frac{1}{4} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{6}$
 $S_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$



두 삼각형 $C_nD_nF_n, G_nF_nE_n$ 으로 만들어진
 \triangle 모양의 도형의 넓이를 T_n 이라 하자.
 $\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = a (a > 0)$ 이라 하면
 $\overline{B_nB_{n+1}} = 2a, \overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 2a, \overline{C_{n+1}C_n} = a$
 $\overline{B_nC_n} = 5a$
 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \frac{2}{5} \overline{B_nC_n}$
두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n,$
 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 닮음비는 $1 : \frac{2}{5}$ 이므로
넓이의 비는 $1^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^2$ 이다.
 $T_{n+1} = \frac{4}{25} T_n$
수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1 = S_1 = \frac{1}{2}$ 이고
공비가 $\frac{4}{25}$ 인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{25}{42}$

28. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^5 f(x)(x + \cos 2\pi x) \, dx \\ &= \int_{-1}^5 x f(x) \, dx + \int_{-1}^5 f(x) \cos 2\pi x \, dx \quad \text{㉠} \\ & \text{조건 (가)에 의하여} \\ & \int_{-1}^1 x f(x) \, dx = 0, \quad \int_{-1}^1 f(x) \, dx = 2 \int_0^1 f(x) \, dx \\ & \int_{-1}^5 x f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 x f(x) \, dx + \int_1^3 x f(x) \, dx + \int_3^5 x f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 x f(x) \, dx + \int_{-1}^1 (x+2) f(x+2) \, dx \\ & \quad + \int_{-1}^1 (x+4) f(x+4) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 x f(x) \, dx + \int_{-1}^1 (x+2) f(x) \, dx \\ & \quad + \int_{-1}^1 (x+4) f(x) \, dx \\ &= 3 \int_{-1}^1 x f(x) \, dx + 6 \int_{-1}^1 f(x) \, dx \\ &= 12 \int_0^1 f(x) \, dx = 24 \quad \text{㉡} \end{aligned}$$

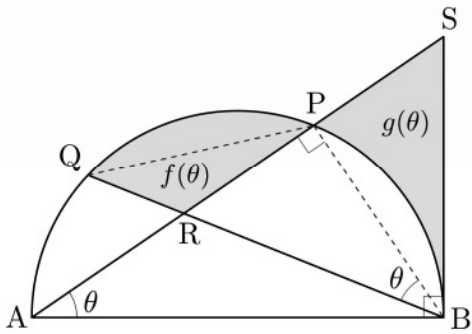
조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 x 에 대하여
 $f(-x) \cos 2\pi(-x) = f(x) \cos 2\pi x$
 $f(x+2) \cos 2\pi(x+2) = f(x) \cos 2\pi x$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^5 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx + \int_1^3 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ & \quad + \int_3^5 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ & \quad + \int_{-1}^1 f(x+2) \cos 2\pi(x+2) \, dx \\ & \quad + \int_{-1}^1 f(x+4) \cos 2\pi(x+4) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx + \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ & \quad + \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= 3 \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= 6 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \end{aligned}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx = \frac{1}{6} \left(\frac{47}{2} - 24 \right) = -\frac{1}{12} \\ & \text{따라서} \\ & \int_0^1 f'(x) \sin 2\pi x \, dx \\ &= \left[f(x) \sin 2\pi x \right]_0^1 - 2\pi \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= -2\pi \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

29. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여
문제 해결하기

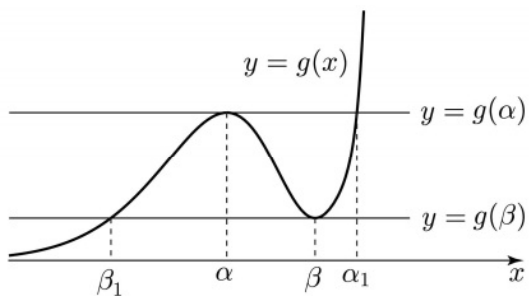


호 PB와 호 PQ의 길이가 서로 같으므로
원주각의 성질에 의하여
 $\angle PAB = \angle QBP = \theta$
 $\angle ABS = \angle APB = \frac{\pi}{2}$ 이고
 $\angle PBA = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 $\angle SBP = \theta$
두 삼각형 SPB, RPB는 서로 합동이므로
두 삼각형 SPB, RPB의 넓이가 서로 같다.
선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이와
선분 PB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이가
서로 같다.
그러므로 $f(\theta) + g(\theta)$ 는 삼각형 QBP의 넓이와
같다.

$$\begin{aligned} \overline{PB} &= \overline{PQ} = 2\sin\theta \\ f(\theta) + g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{PB} \times \overline{PQ} \times \sin(\pi - 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} \times (2\sin\theta)^2 \times \sin 2\theta \\ &= 2\sin^2\theta \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2\sin^2\theta \sin 2\theta}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(2 \times \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \times \frac{\sin 2\theta}{\theta} \right) \\ &= 2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right)^2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times 2 \right) \\ &= 2 \times 1^2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

30. [출제의도] 미분법을 활용하여 추론하기
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면
 $g'(x) = e^x \{f(x) + f'(x)\}$
 $= e^x \{ax^2 + (2a+b)x + b+c\}$
함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를
만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$ 는 극값을
갖는다.



함수 $g(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값, $x = \beta$ 에서
극솟값을 갖는다고 하면
 $g'(x) = e^x \{a(x - \alpha)(x - \beta)\}$

함수 $h(k)$ 는 $k = t$ ($t \neq g(\alpha), t \neq g(\beta)$)에서

$$\lim_{k \rightarrow t^-} h(k) = \lim_{k \rightarrow t^+} h(k) = h(t)$$

그러므로 함수 $h(k)$ 는

$k = t$ ($t \neq g(\alpha), t \neq g(\beta)$)에서 연속이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$ 가 $k = t$ 에서
불연속인 t 의 개수가 1이므로

함수 $h(k)$ 는

$k = g(\alpha)$ 에서 연속이고 $k = g(\beta)$ 에서 불연속
또는

$k = g(\alpha)$ 에서 불연속이고 $k = g(\beta)$ 에서 연속
이다.

(i) 함수 $h(k)$ 가 $k = g(\alpha)$ 에서 연속이고

$k = g(\beta)$ 에서 불연속인 경우

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)^-} h(k) = 2\alpha + \alpha_1$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)^+} h(k) = \alpha_1$$

$$h(g(\alpha)) = \alpha + \alpha_1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)^-} h(k) = \lim_{k \rightarrow g(\alpha)^+} h(k) = h(g(\alpha)) \text{ 에서}$$

$$2\alpha + \alpha_1 = \alpha_1 = \alpha + \alpha_1$$

그러므로 $\alpha = 0$

함수 $h(k)$ 는 $k = g(\beta)$ 에서 불연속이므로

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^+} h(k) - \lim_{k \rightarrow g(\beta)^-} h(k) = 2\beta \neq 0$$

조건 (나)에 의하여 $\beta = 1, g(\beta) = 3e$

$g'(0) = 0, g'(1) = 0$ 이므로

$$g'(x) = e^x \{ax(x-1)\}$$

$$g(x) = e^x \{a(x^2 - 3x + 3)\}$$

$$g(1) = 3e \text{ 이므로 } a = 3$$

최고차항의 계수가 3이므로 주어진 조건을
만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $h(k)$ 가 $k = g(\alpha)$ 에서 불연속이고

$k = g(\beta)$ 에서 연속인 경우

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^-} h(k) = \beta_1$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^+} h(k) = 2\beta + \beta_1$$

$$h(g(\beta)) = \beta + \beta_1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^-} h(k) = \lim_{k \rightarrow g(\beta)^+} h(k) = h(g(\beta)) \text{ 에서}$$

$$\beta_1 = 2\beta + \beta_1 = \beta + \beta_1$$

그러므로 $\beta = 0$

함수 $h(k)$ 는 $k = g(\alpha)$ 에서 불연속이므로

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)^+} h(k) - \lim_{k \rightarrow g(\alpha)^-} h(k) = -2\alpha \neq 0$$

조건 (나)에 의하여 $\alpha = -1, g(\alpha) = 3e$

$g'(0) = 0, g'(-1) = 0$ 이므로

$$g'(x) = e^x \{ax(x+1)\}$$

$$g(x) = e^x \{a(x^2 - x + 1)\}$$

$$g(-1) = 3e \text{ 이므로 } a = e^2$$

$$g(x) = e^{x+2} \{x^2 - x + 1\}$$

$$\text{따라서 } g(-6) \times g(2) = 43e^{-4} \times 3e^4 = 129$$

기하 정답

23	①	24	④	25	⑤	26	④	27	②
28	③	29	15	30	50				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 평행 계산하기
0이 아닌 실수 k 에 대하여 $\vec{a} = k\vec{b}$ 이므로
 $(2m-1, 3m+1) = (3k, 12k)$
 $2m-1 = 3k \dots \textcircled{1}$
 $3m+1 = 12k \dots \textcircled{2}$
따라서 두 식 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면 $m = 1$

24. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식 이해하기
포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $(9, 6)$ 에서의
접선의 방정식은 $6y = 2(x+9)$
준선의 방정식이 $x = -1$ 이므로 $a = -1$
점 $(-1, b)$ 가 접선 위의 점이므로 $b = \frac{8}{3}$
따라서 $a+b = \frac{5}{3}$

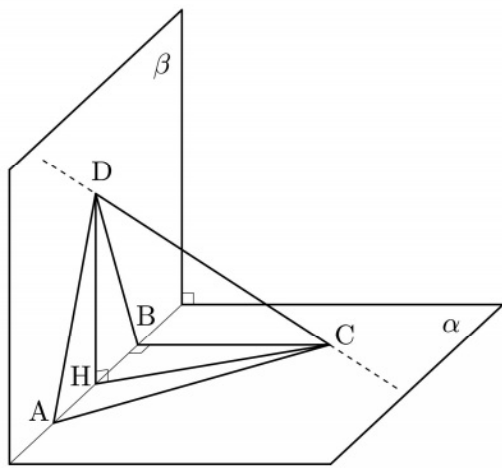
25. [출제의도] 벡터를 이용한 원의 방정식 이해하기
 $\vec{OP} = (x, y)$ 라 하자.
 $\vec{OP} - \vec{OA} = (x+2, y)$
 $\vec{OP} - 2\vec{OB} = (x-6, y-6)$
 $(\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OP} - 2\vec{OB}) = 0$ 에서
 $(x+2, y) \cdot (x-6, y-6) = 0$
 $(x+2)(x-6) + y(y-6) = 0$
 $x^2 - 4x - 12 + y^2 - 6y = 0$
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$
점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(2, 3)$ 이고
반지름의 길이가 5인 원이다.
따라서 구하는 도형의 길이는 10π

26. [출제의도] 쌍곡선의 성질 이해하기

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면
점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{4} - \frac{y_1y}{k} = 1$
이 접선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $\frac{4}{x_1}$
 $\frac{4}{x_1} = \frac{4}{3}$ 이므로 $x_1 = 3$
 $\vec{PF}' = \vec{FF}'$ 이므로 $\sqrt{(3+c)^2 + y_1^2} = 2c$
 $y_1^2 = 3c^2 - 6c - 9 \dots \textcircled{1}$

점 $P(3, y_1)$ 이 쌍곡선 위의 점이고
 $k = c^2 - 4$ 이므로 $\frac{9}{4} - \frac{y_1^2}{c^2 - 4} = 1$
 $y_1^2 = \frac{5}{4}(c^2 - 4) \dots \textcircled{2}$
두 식 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면
 $3c^2 - 6c - 9 = \frac{5}{4}(c^2 - 4)$
 $7c^2 - 24c - 16 = 0, (7c+4)(c-4) = 0$
 $c > 0$ 이므로 $c = 4$
따라서 $k = 12$

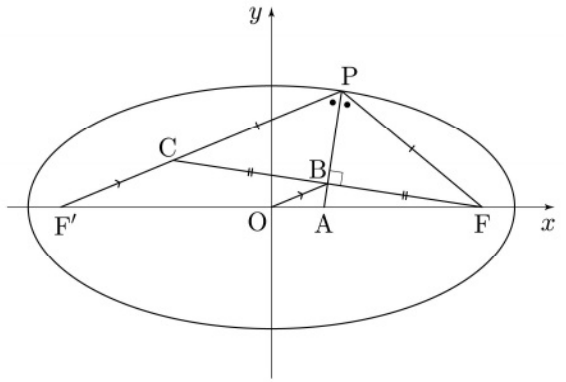
27. [출제의도] 직선과 평면이 이루는 각 이해하기



삼각형 ABC가 직각삼각형이므로
 $\vec{AB} = \sqrt{(2\sqrt{29})^2 - 6^2} = 4\sqrt{5}$
점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을
H라 하면
삼각형 DAB가 이등변삼각형이므로
 $\vec{AH} = \vec{BH} = 2\sqrt{5}, \vec{DH} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4$
삼각형 HBC가 직각삼각형이므로
 $\vec{CH} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{14}$
두 평면 α, β 는 서로 수직이므로 $\vec{DH} \perp \vec{BC}$
 $\vec{DH} \perp \vec{AB}, \vec{DH} \perp \vec{BC}$ 이므로
직선 DH는 평면 α 와 수직이다.

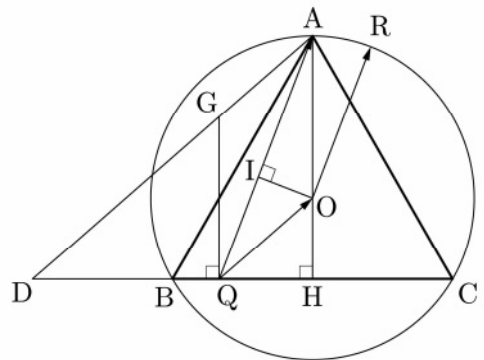
그러므로 $\angle DHC = \frac{\pi}{2}$
 $\vec{CD} = \sqrt{\vec{DH}^2 + \vec{CH}^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{14})^2} = 6\sqrt{2}$
점 D의 평면 α 위로의 정사영이 점 H이므로
 $\cos\theta = \frac{\vec{CH}}{\vec{CD}}$
따라서 $\cos\theta = \frac{2\sqrt{14}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

28. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 추론하기
 $\vec{AF} = \frac{9}{2}, \vec{AF}' = \frac{15}{2}$ 이므로
각의 이등분선의 성질에 의하여
 $\vec{PF} : \vec{PF}' = 3 : 5$
 $\vec{PF} = 3k, \vec{PF}' = 5k (k > 0)$ 이라 하자.
타원의 정의에 의하여 $\vec{PF} + \vec{PF}' = 8k = 2a$
그러므로 $a = 4k$



직선 BF와 선분 PF'이 만나는 점을 C라 하면
각 CPF의 이등분선이 선분 CF와 수직으로
만나므로 삼각형 PCF는 이등변삼각형이다.
그러므로 $\vec{BC} = \vec{BF}$
두 삼각형 FBO와 FCF'에서
 $\vec{FB} : \vec{FC} = \vec{FO} : \vec{FF}' = 1 : 2$
두 삼각형 FBO, FCF'은 서로 닮음이므로
 $\vec{OB} : \vec{F'C} = 1 : 2$
 $\vec{F'C} = \vec{PF}' - \vec{PC} = \vec{PF}' - \vec{PF} = 5k - 3k = 2k$
 $\vec{F'C} = 2\vec{OB} = 2\sqrt{3}$
 $k = \sqrt{3}, a = 4\sqrt{3}$
 $c^2 = a^2 - b^2$ 이므로 $36 = 48 - b^2$
 $b^2 = 12, b = 2\sqrt{3}$
따라서 $a \times b = 24$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적의 성질을
활용하여 문제 해결하기



$\vec{OD} = \frac{3\vec{OB} - \vec{OC}}{3-1}$ 이므로 점 D는
선분 CB를 3:1로 외분하는 점이다.
선분 DA를 2:1로 내분하는 점을 G라 하면
 $|2\vec{PA} + \vec{PD}| = 3|\vec{PG}|$ 이므로 선분 PG의
길이가 최소일 때 $|2\vec{PA} + \vec{PD}|$ 가 최소이다.
그러므로 점 Q는 점 G에서 선분 CD에 내린
수선의 발이다.
점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을
H라 하면 $\vec{DH} = 6$
 $\vec{QH} = \frac{1}{3}\vec{DH} = 2, \vec{AH} = 3\sqrt{3}$ 이므로
 $\vec{QA} = \sqrt{2^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{31}$
 $\vec{OA} = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
정삼각형은 무게중심과 외심이 같으므로
점 R은 삼각형 ABC의 외접원 위의 점이다.
 $\vec{QA} \cdot \vec{QR} = \vec{QA} \cdot (\vec{QO} + \vec{OR})$
 $= (\vec{QA} \cdot \vec{QO}) + (\vec{QA} \cdot \vec{OR})$
두 벡터 \vec{QA}, \vec{QO} 가 이루는 각의 크기를
 $\theta_1 (0 \leq \theta_1 \leq \pi)$ 라 하자.

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QO} = |\overrightarrow{QA}| |\overrightarrow{QO}| \cos \theta_1$$

점 O에서 선분 QA에 내린 수선의 발을 I라 하자.

두 삼각형 AIO, AHQ가 서로 닮음이므로

$$\overline{AI} : \overline{AH} = \overline{OA} : \overline{QA}$$

$$\overline{AI} : 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} : \sqrt{31}$$

$$\overline{AI} = \frac{18}{\sqrt{31}} = \frac{18\sqrt{31}}{31}$$

$$\overline{QI} = \overline{QA} - \overline{AI} = \sqrt{31} - \frac{18\sqrt{31}}{31} = \frac{13\sqrt{31}}{31}$$

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QO} = |\overrightarrow{QA}| |\overrightarrow{QO}| \cos \theta_1$$

$$= |\overrightarrow{QA}| |\overrightarrow{QI}|$$

$$= \sqrt{31} \times \frac{13\sqrt{31}}{31} = 13$$

두 벡터 \overrightarrow{QA} , \overrightarrow{OR} 가 이루는 각의 크기를 θ_2 ($0 \leq \theta_2 \leq \pi$)라 하자.

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR} = |\overrightarrow{QA}| |\overrightarrow{OR}| \cos \theta_2$$

$$= \sqrt{31} \times 2\sqrt{3} \times \cos \theta_2$$

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR}$ 의 값은 두 벡터 \overrightarrow{QA} 와 \overrightarrow{OR} 가 방향이 같을 때 최대이다.

그러므로 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR}$ 의 최댓값은

$$\sqrt{31} \times 2\sqrt{3} \times \cos 0 = 2\sqrt{93}$$

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QR} = (\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QO}) + (\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR})$$

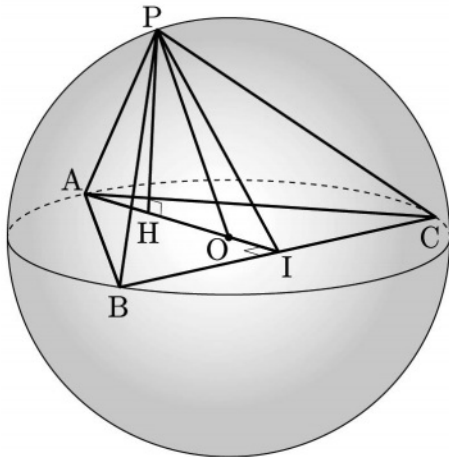
$$\leq 13 + 2\sqrt{93}$$

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QR} \text{의 최댓값은 } 13 + 2\sqrt{93}$$

$$p = 13, q = 2$$

따라서 $p + q = 15$

30. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제 해결하기



점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$$\angle PAO = \frac{\pi}{3} \text{ 이고 } \overline{OA} = \overline{OP} \text{ 이므로}$$

삼각형 PAO는 정삼각형이다.

$$\overline{PA} = 4, \overline{PH} = 2\sqrt{3}, \overline{AH} = \overline{OH} = 2$$

$$\overline{OI} = a \ (a > 0) \text{ 이라 하면}$$

직각삼각형 OIB에서

$$\overline{IB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OI}^2} = \sqrt{16 - a^2}$$

직각삼각형 AIB에서

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AI}^2 + \overline{IB}^2}$$

$$= \sqrt{(a+4)^2 + 16 - a^2}$$

$$= \sqrt{8a+32}$$

직각삼각형 PHI에서

$$\overline{PI} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HI}^2}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (a+2)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 4a + 16}$$

$\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{HI} \perp \overline{BC}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PI} \perp \overline{BC}$ 이다.

직각삼각형 PIB에서

$$\overline{PB} = \sqrt{\overline{PI}^2 + \overline{IB}^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + 4a + 16) + (16 - a^2)}$$

$$= \sqrt{4a + 32}$$

삼각형 PAB에서

$$\cos(\angle PAB) = \frac{\overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2}{2 \times \overline{AP} \times \overline{AB}}$$

$$= \frac{16 + (8a + 32) - (4a + 32)}{2 \times 4 \times \sqrt{8a + 32}}$$

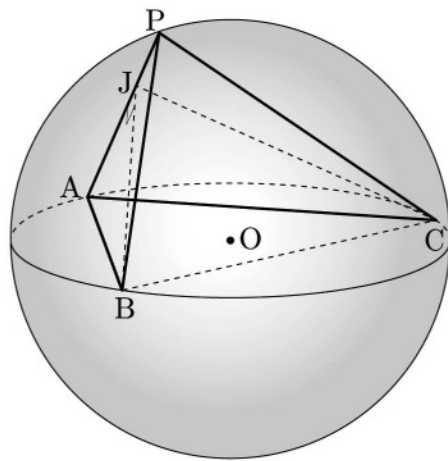
$$= \frac{a + 4}{4\sqrt{2a + 8}}$$

$$\text{그러므로 } \frac{\sqrt{10}}{8} = \frac{a + 4}{4\sqrt{2a + 8}}$$

$$(a + 4)^2 = 5(a + 4)$$

$$a^2 + 3a - 4 = (a + 4)(a - 1) = 0$$

$a > 0$ 이므로 $a = 1$



점 B에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 J라 하자.

$$\sin(\angle PAB) = \frac{\overline{BJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BJ}}{2\sqrt{10}}$$

$$\sin(\angle PAB) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{8} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BJ} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

삼각형 PAB의 넓이를 S' 이라 하자.

$$S' = \frac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{BJ} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = 3\sqrt{15}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}, \overline{PB} = \overline{PC} \text{ 이므로}$$

두 삼각형 PAB, PAC는 서로 합동이다.

$$\overline{BJ} \perp \overline{AP} \text{ 이므로 } \overline{CJ} \perp \overline{AP} \text{ 이고 } \overline{BJ} = \overline{CJ}$$

두 평면 PAB와 PAC가 이루는 예각의 크기를

$$\theta \text{ 라 하면 } \overline{BJ} \perp \overline{AP}, \overline{CJ} \perp \overline{AP} \text{ 이므로}$$

$$\theta = \angle BJC$$

$$\overline{JB} = \overline{JC} = \frac{3\sqrt{15}}{2}, \overline{BC} = 2\sqrt{15}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{JB}^2 + \overline{JC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{JB} \times \overline{JC}}$$

$$= \frac{2 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2 - 60}{2 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{9}$$

$$S = S' \times \cos \theta = 3\sqrt{15} \times \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\text{따라서 } 30 \times S^2 = 30 \times \frac{15}{9} = 50$$