

■ [공통: 수학 I·수학 II]

- 01.① 02.⑤ 03.⑤ 04.④ 05.③
 06.① 07.④ 08.② 09.③ 10.③
 11.④ 12.② 13.② 14.⑤ 15.①
 16. 2 17. 8 18. 9 19. 11
 20. 21 21. 192 22. 108

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}} \\ &= 3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}} \\ &= 3^{-\frac{1}{4} + (-\frac{7}{4})} \\ &= 3^{-2} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

정답 ①

2. 출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 4x + 5 \text{에서} \\ f'(x) &= 6x^2 + 4 \\ \text{이므로} \\ f'(1) &= 6 + 4 = 10 \end{aligned}$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_2 a_4 = 36$$

에서 $a_1 = 2$ 이므로

$$2r \times 2r^3 = 36$$

$$\text{즉, } r^4 = 9$$

따라서

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^2} = r^4 = 9$$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

이 성립해야 한다. 이때,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + a) = -2 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 5x - a) = 6 - a$$

$$f(-1) = -2 + a$$

이므로

$$-2 + a = 6 - a$$

따라서 $a = 4$

정답 ④

5. 출제의도 : 다항함수의 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$= 6(x+2)(x-1)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 이 되는 x 의 값은

$x = -2$ 또는 $x = 1$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값

$$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$$

을 갖고, $x=1$ 에서 극솟값

$$m=f(1)=2+3-12+1=-6$$

을 갖는다.

따라서 $M+m=15$

정답 ③

6. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$$

에서

$$\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=4$$

$$\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=4$$

$$\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$$

$$1-\cos^2\theta=2\cos^2\theta$$

따라서

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

정답 ①

7. 출제의도 : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

이때, $\frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{4}$ 이므로 $n=12$ 를

대입하면

$$\frac{1}{a_{13}} = -\frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}$$

즉, $a_{13} = -3$

정답 ④

8. 출제의도 : 함수의 극한값을 이용하여 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{이면}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

따라서 $f(0) = 0$

$$\text{같은 방법으로 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1 \text{에서}$$

$$f(1) = 0$$

따라서 삼차함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x(x-1)(ax+b) \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(ax+b) = -b$$

이므로

$$b = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(ax+b) = a+b$$

이므로

$$a+b=1$$

따라서 $a=2$ 이므로

$$f(x) = x(x-1)(2x-1)$$

$$\text{따라서 } f(2) = 2 \times 1 \times 3 = 6$$

정답 ②

[다른 풀이]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{이면}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{따라서 } f(0) = 0$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 1$$

$$\text{같은 방법으로 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1 \text{에서}$$

$$f(1) = 0, f'(1) = 1$$

함수 $f(x)$ 는 삼차함수이고

$$f'(0) = f'(1) = 1 \text{이므로}$$

$$f'(x) = ax(x-1) + 1, \text{ 즉}$$

$$f'(x) = ax^2 - ax + 1$$

이라 놓으면

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + x + C \text{ (C는}$$

적분상수)

$$f(0) = 0 \text{에서 } C = 0$$

$$f(1) = 0 \text{에서 } \frac{a}{3} - \frac{a}{2} + 1 = 0$$

$$a = 6 \text{이므로 } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$$

$$\therefore f(2) = 6$$

9. 출제의도 : 도함수를 활용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 t ($t > 0$)에서의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$v(t) = -4t^3 + 12t^2$$

이므로

$$a(t) = v'(t) = -12t^2 + 24t$$

시각 $t = k$ 에서 점 P의 가속도가 12이므로

$$-12k^2 + 24k = 12$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k-1)^2 = 0$$

$$k = 1$$

한편, $v(t) = -4t^3 + 12t^2 = -4t^2(t-3)$ 이므로 $3 \leq t \leq 4$ 일 때 $v(t) \leq 0$ 이다.

따라서 $t = 3$ 에서 $t = 4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_3^4 |v(t)| dt &= \int_3^4 |-4t^3 + 12t^2| dt \\ &= \int_3^4 (4t^3 - 12t^2) dt \\ &= [t^4 - 4t^3]_3^4 \\ &= 0 - (-27) = 27 \end{aligned}$$

정답 ③

10. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 삼각함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = a \sin b\pi x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$$

이므로 두 점 A, B의 좌표는

$$A\left(\frac{1}{2b}, a\right), B\left(\frac{5}{2b}, a\right)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times \left(\frac{5}{2b} - \frac{1}{2b} \right) = 5, \quad \frac{a}{b} = 5$$

$$a = 5b \cdots \textcircled{7}$$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기

의 곱이 $\frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{\frac{a}{1}}{\frac{1}{2b}} \times \frac{\frac{a}{5}}{\frac{1}{2b}}$$

$$= 2ab \times \frac{2ab}{5}$$

$$= \frac{4a^2b^2}{5} = \frac{5}{4}$$

$$a^2b^2 = \frac{25}{16}, \quad ab = \frac{5}{4} \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서 $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ 이므로

$$a + b = 3$$

정답 ③

11. 출제의도 : 정적분과 미분과의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t) dt \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 + a + 3a + 0$$

이므로

$$f(1) = 2 + 4a \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 3a + \int_1^0 f(t) dt$$

즉,

$$0 = 3a - \int_0^1 f(t) dt$$

이므로

$$\int_0^1 f(t) dt = 3a \cdots \textcircled{3}$$

$f(1) = \int_0^1 f(t) dt$ 이므로 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서

$$2 + 4a = 3a$$

$$\text{즉, } a = -2, \quad f(1) = -6$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 6x^2 + 2ax + f(x)$$

이므로

$$f'(x) = 6x + 2a = 6x - 4$$

따라서

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= 3x^2 - 4x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(1) = 3 - 4 + C = -6 \text{에서}$$

$$C = -5$$

따라서

$$f(3) = 27 - 12 - 5 = 10$$

이므로

$$a + f(3) = -2 + 10 = 8$$

정답 ④

12. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{BC} = \sin \frac{\pi}{3} \times 4\sqrt{7}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{7} = 2\sqrt{21}$$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의

길이도 $2\sqrt{7}$ 이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 4\sqrt{7}$$

즉,

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \sin(\angle BCD) \times 4\sqrt{7} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7} \times 4\sqrt{7} = 8\end{aligned}$$

한편, $\angle BDC = \pi - \angle BAC = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$\overline{CD} = x$ 라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2 = x^2 + 8^2 - 2 \times x \times 8 \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$(x-2)(x+10) = 0$$

$x > 0$ 이므로 $x = 2$

즉, $\overline{CD} = 2$

따라서 $\overline{BD} + \overline{CD} = 8 + 2 = 10$

정답 ②

13. 출제의도 : 등차수열의 성질과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1 = -45 < 0$ 이고 $d > 0$ 이므로

조건(가)를 만족시키기 위해서는

$$a_m < 0, a_{m+3} > 0$$

즉, $-a_m = a_{m+3}$ 에서 $a_m + a_{m+3} = 0$

따라서,

$$\{-45 + (m-1)d\} + \{-45 + (m+2)d\} = 0$$

$$-90 + (2m+1)d = 0$$

$$(2m+1)d = 90 \cdots \textcircled{1}$$

이고 $2m+1$ 은 1보다 큰 홀수이므로 d 는 짝수이다.

그런데, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30 이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n\{2 \times (-45) + (n-1)d\}}{2} > -100$$

$$n\{-90 + (n-1)d\} > -200 \cdots \textcircled{2}$$

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{2}$ 을 만족시키는 경우는 18, 30 이므로 구하는 모든 자연수 d 의 값의 합은

$$18 + 30 = 48$$

정답 ②

14. 출제의도 : 다항함수의 미분과 정적분을 활용하여 주어진 명제의 참과 거짓을 판정할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = f'(2) = 0$ 이므로

$$f'(x) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x$$

이다.

따라서

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= x^3 - 3x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

따라서

$$f(x) - f(0) = x^3 - 3x^2$$

이고

$$f(x+p) - f(p)$$

$$= (x+p)^3 - 3(x+p)^2 + C - (p^3 - 3p^2 + C)$$

$$= x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x$$

이므로

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x & (x > 0) \end{cases}$$

이다.

ㄱ. $p = 1$ 이면

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3 - 3x & (x > 0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & (x < 0) \\ 3x^2 - 3 & (x > 0) \end{cases}$$

따라서 $g'(1) = 3 - 3 = 0$ (참)

ㄴ.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0 \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - 6x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \{3x^2 + 2(3p-3)x + (3p^2 - 6p)\}$$

$$= 3p^2 - 6p$$

이므로 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$$3p^2 - 6p = 0$$

이어야 한다.

따라서 양수 p 의 값은 $p = 2$ 뿐이므로 양수 p 의 개수는 1이다. (참)

ㄷ.

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{5}{4}$$

이고,

$$\int_0^1 g(x) dx$$

$$= \int_0^1 \{x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2 - 6p)x\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + (p-1)x^3 + \frac{3p^2 - 6p}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + (p-1) + \frac{3p^2 - 6p}{2}$$

$$= \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4}$$

이므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx$$

$$= \left(-\frac{5}{4} \right) + \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{2}p^2 - 2p - 2$$

$$= \frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

따라서 $p \geq 2$ 일 때 $\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0$ 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고

$$f'(0) = f'(2) = 0$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대이고 $x = 2$ 에서 극소이다.

이때, 곡선 $y = f(x) - f(0)$ 은 곡선

$y = f(x)$ 를 y 축의 방향으로 $-f(0)$ 만큼

평행이동한 것이고, 곡선

$y = f(x+p) - f(p)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 를

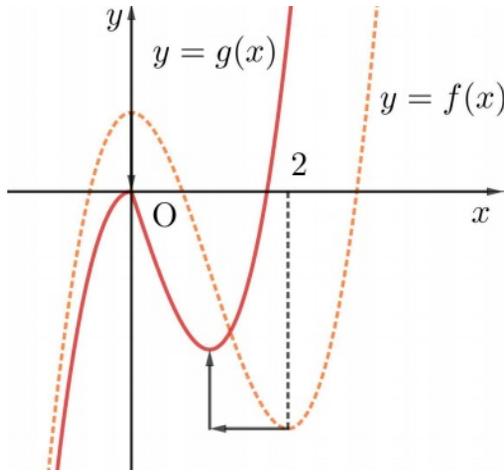
x 축의 방향으로 $-p$ 만큼, y 축의

방향으로 $-f(p)$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 두 곡선 $y = f(x) - f(0)$,

$y = f(x+p) - f(p)$ 는 모두 원점을 지나고

함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=1$ 일 때, 곡선 $y=f(x+1)-f(1)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 $-f(1)$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $g'(1)=0$ 이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - 6x) = 0$$

이므로 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 0$$

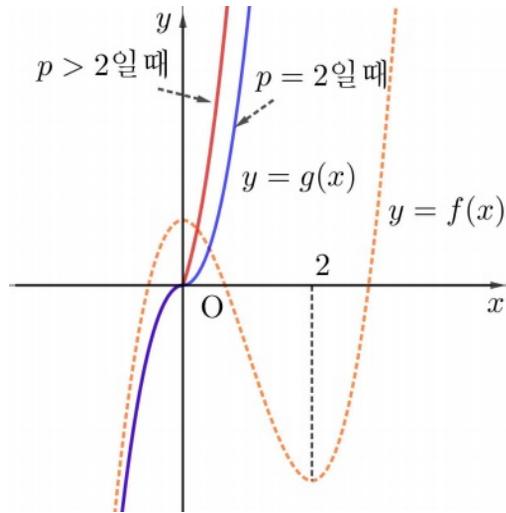
이어야 한다.

그런데 $f'(x)=0$ 인 양수 x 의 값은

2뿐이므로 양수 p 의 값은 2뿐이다.

따라서 양수 p 의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $p \geq 2$ 일 때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$p=2$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$$

$p > 2$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+p) - f(p) \geq f(x+2) - f(2)$$

이므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0$$

따라서 $p \geq 2$ 일 때 $\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0$ (참)

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

먼저 a_5 의 값을 구해 보자.

$$-1 \leq a_5 < -\frac{1}{2} \text{ 이면 } a_6 = -2a_5 - 2 \text{ 이므로}$$

$$a_5 + a_6 = 0 \text{ 에서 } -a_5 - 2 = 0$$

즉, $a_5 = -2$ 이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

$$-\frac{1}{2} \leq a_5 \leq \frac{1}{2} \text{ 이면 } a_6 = 2a_5 \text{ 이므로}$$

$$a_5 + a_6 = 0 \text{에서 } 3a_5 = 0$$

$$\text{즉, } a_5 = 0$$

$$\frac{1}{2} < a_5 \leq 1 \text{이면 } a_6 = -2a_5 + 2 \text{ 이므로}$$

$$a_5 + a_6 = 0 \text{에서 } -a_5 + 2 = 0$$

즉, $a_5 = 2$ 이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_5 = 0$ 이고 이때 $a_4 = -1$ 또는

$$a_4 = 0 \text{ 또는 } a_4 = 1 \text{이다.}$$

한편 $0 \leq a_{n+1} \leq 1$ 일 때

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n+1} \text{ 또는 } a_n = 1 - \frac{1}{2}a_{n+1}$$

(i) $a_4 = -1$ 인 경우

$a_3 < 0, a_2 < 0, a_1 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4 = 0$ 인 경우

㉠ $a_3 = -1$ 인 경우

$a_2 < 0, a_1 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3 = 0$ 인 경우

$a_2 = 0$ 또는 $a_2 = 1$ 이고,

$a_2 = 0$ 일 때 $a_1 = 1$ 이면 조건을 만족시키고, $a_2 = 1$ 일 때 $a_1 = \frac{1}{2}$ 이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉢ $a_3 = 1$ 인 경우

$a_2 = \frac{1}{2}$ 이고 이때 $a_1 = \frac{1}{4}$ 또는

$a_1 = \frac{3}{4}$ 이며, 이것은 조건을 만족시킨다.

(iii) $a_4 = 1$ 인 경우

$a_3 = \frac{1}{2}$ 이고 이때 $a_2 = \frac{1}{4}$ 또는

$$a_2 = \frac{3}{4}$$

㉠ $a_2 = \frac{1}{4}$ 인 경우

$a_1 = \frac{1}{8}$ 또는 $a_1 = \frac{7}{8}$ 이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_2 = \frac{3}{4}$ 인 경우

$a_1 = \frac{3}{8}$ 또는 $a_1 = \frac{5}{8}$ 이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1 의 값의 합은

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{2}$$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \log_2 100 - 2\log_2 5 \\ &= \log_2 100 - \log_2 25 \\ &= \log_2 \frac{100}{25} \\ &= \log_2 4 \\ &= \log_2 2^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

정답 2

17. 출제의도 : 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (8x^3 - 12x^2 + 7) dx \end{aligned}$$

$= 2x^4 - 4x^3 + 7x + C$ (C 는 적분상수)
 이때 $f(0) = 3$ 이므로
 $C = 3$
 따라서
 $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x + 3$
 이므로
 $f(1) = 2 - 4 + 7 + 3 = 8$

정답 8

18. 출제의도 : 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = 45 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k = 45 \quad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 3 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 3 \quad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

$\textcircled{\ominus}$, $\textcircled{\ominus}$ 에서

$$3 \sum_{k=1}^{10} b_k = 42$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^{10} b_k = 14$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \left(b_k - \frac{1}{2} \right) &= \sum_{k=1}^{10} b_k - 10 \times \frac{1}{2} \\ &= 14 - 5 = 9 \end{aligned}$$

정답 9

19. 출제의도 : 평균변화율과 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ 에서 x 의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{64 - 96 + 20}{4} = -3$$

또한, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$ 이므로

$$3a^2 - 12a + 5 = -3, \quad 3a^2 - 12a + 8 = 0 \dots\textcircled{\ominus}$$

$\textcircled{\ominus}$ 을 만족시키는 모든 실수 a 는 $0 < a < 4$ 를 만족시키므로 모든 실수 a 의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$ 이다.

따라서 $p = 3, q = 8$ 이므로

$$p + q = 11$$

정답 11

20. 출제의도 : 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) + |f(x) + x| - 6x$$

라 하면

$$g(x) = \begin{cases} -7x & (f(x) < -x) \\ 2f(x) - 5x & (f(x) \geq -x) \end{cases}$$

이고, 주어진 방정식은

$$g(x) = k \text{와 같다.}$$

$$f(x) = -x \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 10x = -x,$$

$$\frac{x}{2}(x^2 - 9x + 22) = 0$$

이때 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 - 9x + 22 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -x$ 는

오직 원점 (0,0)에서만 만난다.

따라서 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = 2f(x) - 5x \\ = x^3 - 9x^2 + 15x$$

라 하면

$$g(x) = \begin{cases} -7x & (x < 0) \\ h(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다.

$$h'(x) = 3x^2 - 18x + 15 \\ = 3(x-1)(x-5)$$

이므로 $h'(x) = 0$ 에서

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값

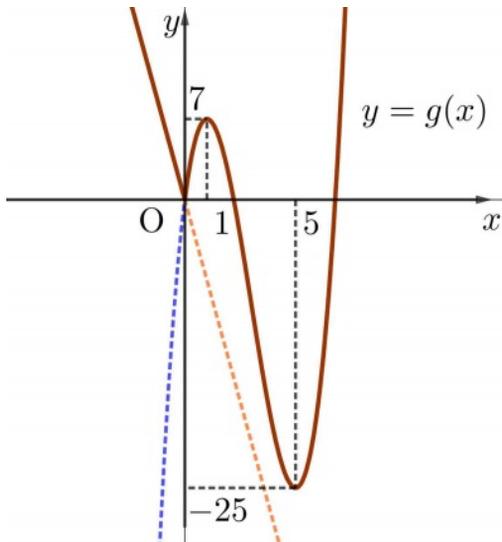
$$h(1) = 1 - 9 + 15 = 7$$

을 갖고, $x = 5$ 에서 극솟값

$$h(5) = 125 - 225 + 75 = -25$$

를 갖는다.

따라서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수가 4이어야 하므로 실수 k 의 값의 범위는 $0 < k < 7$ 이다.

따라서 모든 정수 k 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + \dots + 6 \\ = \frac{6}{2}(1+6) = 21$$

정답 21

21. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = a^{x-1}$ 은 곡선 $y = a^x$ 을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y = \log_a(x-1)$ 은 곡선 $y = \log_a x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y = a^{x-1}$, $y = \log_a(x-1)$ 은 직선 $y = x-1$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y = -x+4$, $y = x-1$ 의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$$M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{이고, 점 M은 선분 AB의 중}$$

점이므로 $\overline{AM} = \sqrt{2}$ 이다.

점 A의 좌표를 $(k, -k+4)$ 라 하면

$$\left(k - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-k + \frac{5}{2}\right)^2 = 2$$

에서

$$k = \frac{3}{2}$$

즉, $A\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{5}{2} = a^{\frac{3}{2}-1}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$a = \frac{25}{4}$$

이때 점 C의 좌표는 $(0, \frac{1}{a})$, 즉 $(0, \frac{4}{25})$

이고, 점 C에서 직선 $y=-x+4$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH} = \frac{\left|0 + \frac{4}{25} - 4\right|}{\sqrt{2}} = \frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{48\sqrt{2}}{25} \\ &= \frac{96}{25} \end{aligned}$$

이므로

$$50 \times S = 50 \times \frac{96}{25} = 192$$

정답 192

22. 출제의도 : 함수의 연속성과 미분가능성 및 삼차함수의 그래프를 이해하고 활용하여 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$i(x) = |f(x)|$ 로 놓으면 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 모든 x 의 값에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{i(x+h) - i(x)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{i(x+h) - i(x)}{h}$$

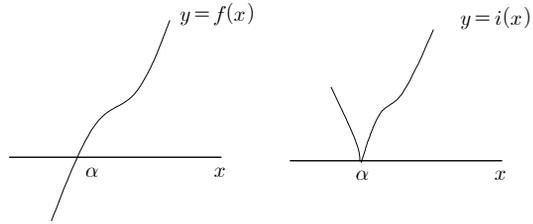
의 값이 항상 존재한다.

따라서,

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x)| - |f(x-h)| + |f(x)|}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{i(x+h) - i(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{i(x-h) - i(x)}{-h}$$

(i) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$ 인 경우



$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-3) \times \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h} \\ &= f(x-3) \times \left\{ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{i(x+h) - i(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{i(x-h) - i(x)}{-h} \right\} \\ &= \begin{cases} f(x-3) \times \{-2f'(x)\} & (x < \alpha) \\ 0 & (x = \alpha) \\ f(x-3) \times \{2f'(x)\} & (x > \alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

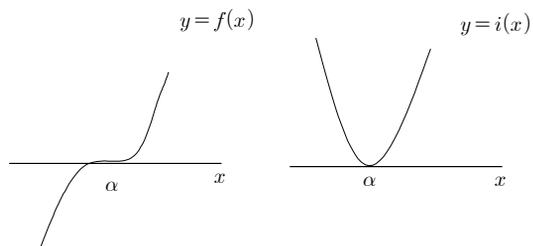
$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} g(x) = g(\alpha)$$

이어야 하므로

$$f(\alpha-3) \times \{-2f'(\alpha)\} = f(\alpha-3) \times \{2f'(\alpha)\} = 0$$

그런데 $f'(\alpha) \neq 0, f(\alpha-3) \neq 0$ 이므로 모순이다.

(ii) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$ 인 경우



$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-3) \times \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h} \end{aligned}$$

$$= f(x-3) \times \left\{ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{i(x+h) - i(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{i(x-h) - i(x)}{-h} \right\}$$

$$= \begin{cases} f(x-3) \times \{-2f'(x)\} & (x < \alpha) \\ 0 & (x = \alpha) \\ f(x-3) \times \{2f'(x)\} & (x > \alpha) \end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} g(x) = g(\alpha)$$

이어야 하고 $f'(\alpha) = 0$ 이므로

$$f(\alpha-3) \times \{-2f'(\alpha)\}$$

$$= f(\alpha-3) \times \{2f'(\alpha)\} = 0$$

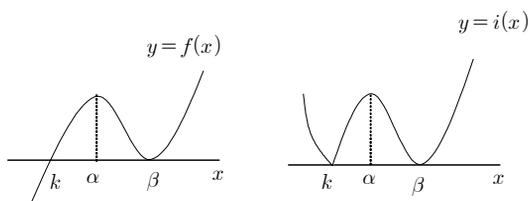
이 성립한다.

그런데, 방정식 $g(x) = 0$ 을 만족시키는 실근은 $x = \alpha$ 또는 $x = \alpha + 3$ 으로 2개 뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하고 $f(\alpha) \neq 0$, $f(\beta) \neq 0$, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ 인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k) = 0$ 을 만족시키는 $x = k$ 에서 함수 $g(x)$ 는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iv) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하고 $f(k) = 0$, $f(\alpha) \neq 0$, $f(\beta) = 0$, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ ($k < \alpha < \beta$) 인 경우



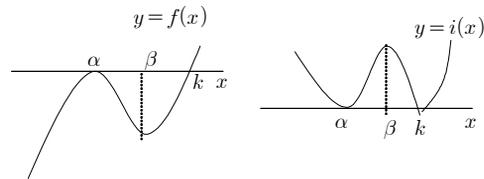
(i)의 경우와 같이 $f(k) = 0$ 을 만족시키는 $x = k$ 에서 함수 $g(x)$ 는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(v) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하고 $f(k) = 0$, $f(l) = 0$, $f(m) = 0$,

$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ ($k < \alpha < l < \beta < m$) 인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k) = 0$ 을 만족시키는 $x = k$ 에서 함수 $g(x)$ 는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(vi) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하고 $f(k) = 0$, $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) \neq 0$, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ ($\alpha < \beta < k$) 인 경우



$g(x)$

$$= f(x-3) \times \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$$

$$= f(x-3) \times \left\{ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{i(x+h) - i(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{i(x-h) - i(x)}{-h} \right\}$$

$$= \begin{cases} f(x-3) \times \{-2f'(x)\} & (x < k) \\ 0 & (x = k) \\ f(x-3) \times \{2f'(x)\} & (x > k) \end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$\lim_{x \rightarrow k^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} g(x) = g(k)$$

이어야 하므로

$$f(k-3) \times \{-2f'(k)\} = f(k-3) \times \{2f'(k)\} = 0$$

그런데 $f'(k) \neq 0$ 이므로 $f(k-3) = 0$ 이고

$$k-3 = \alpha \cdots \ominus$$

즉, $k = \alpha + 3$ 이면 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, 방정식 $g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근은

$$x < k \text{ 일 때 } x = \alpha \text{ 또는 } x = \beta$$

$$x = k \text{ 일 때 } x = k$$

$$x > k \text{ 일 때 } x = k+3$$

이고 조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의
합이 4이므로

$$\alpha + \beta + k + k + 3 = 7$$

$$\alpha + \beta + 2k = 4 \cdots \textcircled{A}$$

또한,

$$f(x) = (x - \alpha)^2(x - k)$$

이고 $f'(x) = (x - \alpha)(3x - 2k - \alpha)$ 이므로

$f'(x) = 0$ 에서

$$\beta = \frac{\alpha + 2k}{3}$$

\textcircled{A} 에 대입하여 정리하면

$$\alpha + 2k = 3$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $\alpha = -1, k = 2$ 이므로

$$f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$$

따라서

$$f(5) = (5 + 1)^2(5 - 2) = 36 \times 3 = 108$$

정답 108

[선택: 확률과 통계]

23. ③ 24. ③ 25. ② 26. ① 27. ⑤
28. ④ 29. 78 30. 218

23. 출제의도 : 이항분포를 따르는 확률 변수의 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$E(X) = 60 \times \frac{1}{4} = 15$$

정답 ③

24. 출제의도 : 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$4 \times 4 = 16$$

$a \times b > 31$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(5, 8), (7, 6), (7, 8)$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3}{16}$$

정답 ③

25. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x^2 + \frac{a}{x})^5$ 의 일반항은

$${}_5C_r (x^2)^{5-r} \left(\frac{a}{x}\right)^r$$

$$= {}_5C_r a^r x^{10-3r}$$

(단, $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

이때, $\frac{1}{x^2}$ 의 계수는

$10-3r=-2$ 에서 $r=4$ 이므로

$${}_5C_4 a^4 = 5a^4$$

또 x 의 계수는

$10-3r=1$ 에서 $r=3$ 이므로

$${}_5C_3 a^3 = 10a^3$$

따라서 $a > 0$ 이므로

$$5a^4 = 10a^3$$
에서

$$a = 2$$

정답 ②

26. 출제의도 : 조건을 만족시키는 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 E , 주사위의 눈의 수가 5 이상인 사건을 F 라 하면

구하는 확률은

$$P(F | E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

$$P(E) = \frac{1}{3} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} + \frac{2}{3} \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{15} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{15}$$

$$= \frac{1}{45} + \frac{6}{45}$$

$$= \frac{7}{45}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{3} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{45}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 P(F | E) &= \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \\
 &= \frac{1}{\frac{45}{7}} \\
 &= \frac{1}{7}
 \end{aligned}$$

정답 ①

27. 출제의도 : 표본평균의 확률분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X 의 표준편차를 a 라 하면
 확률변수 X 는 정규분포 $N(220, a^2)$ 을 따른다.

확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(220, \left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

을 따르고, $Z = \frac{\bar{X} - 220}{\frac{a}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 이때,

$$\begin{aligned}
 P(\bar{X} \leq 215) &= P\left(Z \leq \frac{215 - 220}{\frac{a}{\sqrt{n}}}\right) \\
 &= P\left(Z \leq -\frac{5\sqrt{n}}{a}\right) \\
 &= P\left(Z \geq \frac{5\sqrt{n}}{a}\right) \\
 &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{a}\right)
 \end{aligned}$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{a}\right) = 0.1587 \text{에서}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{a}\right) = 0.3413 \text{이므로}$$

$$\frac{5\sqrt{n}}{a} = 1$$

$$\frac{a}{\sqrt{n}} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 조건 (나)에서 확률변수 Y 의 표준편차는 $\frac{3a}{2}$ 이므로

확률변수 Y 는 정규분포 $N\left(240, \left(\frac{3a}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

확률변수 \bar{Y} 는 정규분포

$$N\left(240, \left(\frac{3a}{3\sqrt{n}}\right)^2\right) \text{을 따르고}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } \frac{\frac{3a}{2}}{3\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{5}{2} \text{이므로,}$$

$Z = \frac{\bar{Y} - 240}{\frac{5}{2}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}
 P(\bar{Y} \geq 235) &= P\left(Z \geq \frac{235 - 240}{\frac{5}{2}}\right) \\
 &= P(Z \geq -2) \\
 &= P(-2 \leq Z \leq 0) + 0.5 \\
 &= P(0 \leq Z \leq 2) + 0.5 \\
 &= 0.4772 + 0.5 \\
 &= 0.9772
 \end{aligned}$$

정답 ⑤

28. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)와 조건 (다)에서

$$f(3) \neq 1, f(4) \neq 6$$

조건 (가)에서 $f(3)+f(4)$ 가 5의 배수인 $f(3), f(4)$ 의 순서쌍 $(f(3), f(4))$ 는

$(4, 1), (2, 3), (3, 2), (6, 4), (5, 5)$

(i) $f(3)=4, f(4)=1$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $3^2=9$

$f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $5^2=25$

즉 함수 f 의 개수는

$$9 \times 25 = 225$$

(ii) $f(3)=2, f(4)=3$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $1^2=1$

$f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $3^2=9$

즉 함수 f 의 개수는

$$1 \times 9 = 9$$

(iii) $f(3)=3, f(4)=2$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $2^2=4$

$f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $4^2=16$

즉 함수 f 의 개수는

$$4 \times 16 = 64$$

(iv) $f(3)=6, f(4)=4$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $5^2=25$

$f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $2^2=4$

즉 함수 f 의 개수는

$$25 \times 4 = 100$$

(v) $f(3)=5, f(4)=5$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $4^2=16$

$f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $1^2=1$

즉 함수 f 의 개수는

$$16 \times 1 = 16$$

(i)~(v)에서

구하는 함수 f 의 개수는

$$225 + 9 + 64 + 100 + 16 = 414$$

정답 ④

29. 출제의도 : 확률분포가 표로 주어진 확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X 가 갖는 값이 $X=5$ 에 대하여 확률분포가 대칭이므로

$$E(X)=5$$

$$\text{또 } V(X)=\frac{31}{5} \text{ 이므로}$$

$$E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{31}{5} \text{ 에서}$$

$$E(X^2) = 25 + \frac{31}{5}$$

이때,

$$E(X^2)$$

$$= 1^2 \times a + 3^2 \times b + 5^2 \times c + 7^2 \times b + 9^2 \times a \\ = 82a + 58b + 25c$$

이므로

$$82a + 58b + 25c = 25 + \frac{31}{5} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 확률변수 Y 가 갖는 값이 $Y=5$ 에 대하여 확률분포가 대칭이므로

$E(Y)=5$ 이고,

$E(Y^2)$

$$= 1^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) + 3^2 \times b + 5^2 \times \left(c - \frac{1}{10}\right) + 7^2 \times b + 9^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right)$$

$$= 82a + 58b + 25c + \frac{1}{20} - \frac{5}{2} + \frac{81}{20}$$

$$= 82a + 58b + 25c + \frac{8}{5}$$

㉠에서

$$E(Y^2) = 25 + \frac{31}{5} + \frac{8}{5}$$

$$= 25 + \frac{39}{5}$$

따라서

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2$$

$$= 25 + \frac{39}{5} - 5^2$$

$$= \frac{39}{5}$$

이므로

$$10 \times V(Y) = 10 \times \frac{39}{5} = 78$$

정답 78

30. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

사인펜이 14개이므로

조건 (가)와 (다)에 의해

네 명의 학생 A, B, C, D 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받거나 네 명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는다.

(i) 네 명의 학생 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받는 경우

4명의 학생 중 짝수 개의 사인펜을 받는 2명의 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2$$

두 명의 학생 A, B는 짝수 개의 사인펜을 받고 두 명의 학생 C, D는 홀수 개의 사인펜을 받는다고 하면 네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수는 각각

$2a+2, 2b+2, 2c+1, 2d+1$ (a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)이다.

$$(2a+2) + (2b+2) + (2c+1) + (2d+1) = 14$$

에서

$$a+b+c+d=4$$

방정식 $a+b+c+d=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 순서쌍

(a, b, c, d) 의 개수는

$${}_4H_4$$

조건 (나)에 의해 $a \neq 4, b \neq 4$ 이므로

주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times ({}_4H_4 - 2) = {}_4C_2 \times ({}_7C_4 - 2) = 198$$

(ii) 네 명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는 경우

네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수는 각각

$2a+2, 2b+2, 2c+2, 2d+2$ (a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)이다.

$$(2a+2) + (2b+2) + (2c+2) + (2d+2) = 14$$

에서

$$a+b+c+d=3$$

방정식 $a+b+c+d=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 순서쌍

(a, b, c, d) 의 개수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

(i), (ii)에서
구하는 경우의 수는
 $198 + 20 = 218$

정답 218

[다른 풀이]

A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하면

$$a + b + c + d = 14$$

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍

(a, b, c, d) 의 개수는

$$a = a' + 1, b = b' + 1, c = c' + 1,$$

$$d = d' + 1 \text{로 놓으면}$$

방정식 $a' + b' + c' + d' = 10$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d' 의 순서쌍 (a', b', c', d') 의 개수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_4H_{10} &= {}_{13}C_{10} \\ &= {}_{13}C_3 \\ &= \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 286 \end{aligned}$$

한편, 네 명이 모두 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는

$$a = 2a'' + 1, b = 2b'' + 1, c = 2c'' + 1,$$

$$d = 2d'' + 1 \text{로 놓으면}$$

방정식 $a'' + b'' + c'' + d'' = 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d'' 의 순서쌍 (a'', b'', c'', d'') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

즉 조건 (가)와 조건 (다)를 만족시키는 경우의 수는

$$286 - 56 = 230$$

한편, 조건 (가)와 조건 (다)를 만족시키고, 사인펜을 10개 이상 받은 학생이 있는 경우 각 학생이 받은 사인펜의 개수는 10, 2, 1, 1뿐이고 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 모든 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$230 - 12 = 218$$

정답 218

■ [선택: 미적분]

23. ③ 24. ② 25. ④ 26. ② 27. ③
28. ① 29. 24 30. 115

23. 출제의도 : 등비수열의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 3^{n+1} + 5}{3^n + 2^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{6 + 5 \times 0}{1 + 2 \times 0} \\ &= 6 \end{aligned}$$

정답 ③

24. 출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 탄젠트의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2 \cos \alpha = 3 \sin \alpha$ 에서

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{3} \text{ 이므로}$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{2}{3} + \tan \beta}{1 - \frac{2}{3} \tan \beta} \\ &= \frac{2 + 3 \tan \beta}{3 - 2 \tan \beta} \end{aligned}$$

이고, $\tan(\alpha + \beta) = 1$ 이므로

$$\frac{2 + 3 \tan \beta}{3 - 2 \tan \beta} = 1$$

따라서

$$\tan \beta = \frac{1}{5}$$

정답 ②

25. 출제의도 : 매개변수로 나타내어진 곡선에서 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x = e^t - 4e^{-t}$, $y = t + 1$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = e^t + 4e^{-t},$$

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^t + 4e^{-t}}$$

따라서 $t = \ln 2$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{1}{e^{\ln 2} + 4e^{-\ln 2}} = \frac{1}{2 + 4 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

정답 ④

26. 출제의도 : 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

x 좌표가 $t(1 \leq t \leq 2)$ 인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{3t+1}{t^2}}$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{3t+1}{t^2}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 S(t)dt \\ &= \int_1^2 \frac{3t+1}{t^2} dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \left[3\ln|t| - \frac{1}{t} \right]_1^2 \\ &= \left(3\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - (3\ln 1 - 1) \\ &= \frac{1}{2} + 3\ln 2 \end{aligned}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 한없이 반복되는 도형에서 등비급수를 활용하여 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 $C_1D_1F_1$ 에서

$$\angle C_1D_1F_1 = \frac{\pi}{6},$$

$$\overline{C_1D_1} = 1$$

이므로

$$\overline{C_1F_1} = \overline{C_1D_1} \times \tan \frac{\pi}{6} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 $C_1D_1E_1$ 에서

$$\angle C_1D_1E_1 = \frac{\pi}{3}$$

이므로

$$\overline{C_1E_1} = \overline{C_1D_1} \times \tan \frac{\pi}{3} = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

이때,

$$\overline{E_1F_1} = \overline{C_1E_1} - \overline{C_1F_1} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 $E_1F_1H_1$ 에서

$$\angle H_1E_1F_1 = \frac{\pi}{6}$$

이므로

$$\overline{F_1H_1} = \overline{E_1F_1} \times \tan \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$$

$$S_1 = \Delta E_1F_1G_1 + \Delta E_1F_1D_1 - 2 \times \Delta E_1F_1H_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{E_1F_1} \times \overline{F_1G_1} + \frac{1}{2} \times \overline{E_1F_1} \times \overline{C_1D_1}$$

$$- 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{E_1F_1} \times \overline{F_1H_1} \right)$$

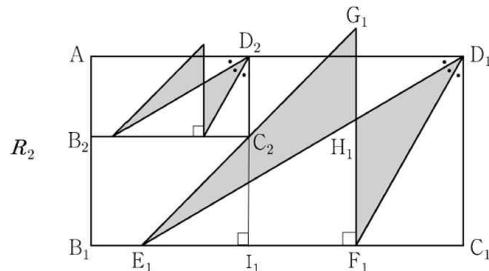
$$= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 1$$

$$- 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{6 - \sqrt{3}}{9}$$

한편, $\overline{AB_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : 2$ 이므로

$\overline{AB_2} = k, \overline{B_2C_2} = 2k (k > 0)$ 이라 하자.



점 C_2 에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 I_1 이라 하면

$$\overline{E_1I_1} = \overline{C_2I_1} = 1 - k,$$

$$\overline{I_1C_1} = 2 - 2k$$

이므로

$$(1 - k) + (2 - 2k) = \sqrt{3}$$

$$k = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

그림 R_1 에 색칠되어 있는 도형과 그림

R_2 에 새로 색칠되어 있는 도형의 닮음비

가 $1: \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ 이므로 넓이의 비는

$1: \frac{4-2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

따라서 구하는 극한값은 첫째항이

$\frac{6-\sqrt{3}}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$ 인

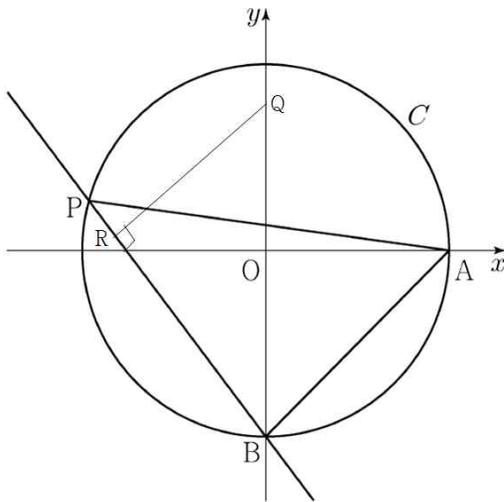
등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1 - \frac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

정답 ③

28. 출제의도 : 삼각함수의 적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$$\overline{QB} = 2 + 2\cos\theta = 2(1 + \cos\theta)$$

이고

직각삼각형 QRB에서

$$\angle QBR = \frac{\pi}{2} - \theta$$

이므로

$$\overline{BR} = \overline{QB} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta} = 2 \times 2$$

이므로

$$\overline{BP} = 4\sin\theta$$

따라서

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \overline{BP} - \overline{BR} \\ &= 4\sin\theta - 2(1 + \cos\theta)\sin\theta \\ &= 2\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta) d\theta \\ &= \left[-2\cos\theta - \sin^2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(-2\cos\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3} \right) - \left(-2\cos\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6} \right) \\ &= \left(-1 - \frac{3}{4} \right) - \left(-\sqrt{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} \end{aligned}$$

정답 ①

29. 출제의도 : 함수의 극대, 극소 및 함수의 그래프의 개형을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g(x) = \{f(x) + 2\}e^{f(x)} \text{ 이므로}$$

$$g'(x) = f'(x) \{f(x) + 3\}e^{f(x)}$$

$g'(x) = 0$ 에서
 $f'(x) = 0$ 또는 $f(x) + 3 = 0$
 $f(x)$ 가 이차함수이므로
 조건 (가), (나)에 의해
 $f'(a) = 0, f(a) = 6$
 $f(b) + 3 = 0, f(b+6) + 3 = 0$
 이어야 한다.
 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 p 라
 하면
 $f(b) + 3 = 0, f(b+6) + 3 = 0$ 이므로
 $f(x) + 3 = p(x-b)(x-b-6)$
 즉, $f(x) = p(x-b)(x-b-6) - 3 \dots\dots \textcircled{1}$
 이때, $f'(a) = 0$ 이므로
 $\frac{b+(b+6)}{2} = a$
 $b = a - 3 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서
 $f(x) = p(x-a+3)(x-a-3) - 3$
 이므로
 $f(a) = -9p - 3 = 6$ 에서
 $p = -1$
 방정식 $f(x) = 0$ 에서
 $-(x-a+3)(x-a-3) - 3 = 0$
 $(x-a)^2 - 6 = 0$
 $x = a \pm \sqrt{6}$
 따라서
 $(\alpha - \beta)^2 = \{(a + \sqrt{6}) - (a - \sqrt{6})\}^2 = 24$

정답 24

30. 출제의도 : 삼각함수의 극한 및 함
 수의 극값을 이용하여 주어진 조건을 만
 족시키는 함수를 구한 후 치환적분법을
 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는
 가?

정답풀이 :

조건 (가)에서
 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재
 하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다,

즉,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\pi \times f(x)) = \sin(\pi \times f(0)) = 0$
 에서
 $f(0) = n$ (n 은 정수)
 이다.

한편, 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수
 가 9이므로
 $f(x) = 9x^3 + ax^2 + bx + n$ (a, b 는 상수)
 로 놓을 수 있다.

이때, $h(x) = \sin(\pi \times f(x))$ 라 하면
 $h(0) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0)$$

이다. 즉,
 $h'(0) = 0$
 이다.
 이때, $h'(x) = \pi f'(x) \times \cos(\pi \times f(x))$ 이므
 로
 $h'(0) = \pi f'(0) \times \cos(n\pi) = 0$ 에서
 $f'(0) = 0$

$f'(x) = 27x^2 + 2ax + b$ 에서
 $f'(0) = b = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$

한편, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에
 서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

이어야 한다.
 이때, 함수 $g(x)$ 는 $0 \leq x < 1$ 일 때
 $g(x) = f(x)$ 이고 모든 실수 x 에 대하여
 $g(x+1) = g(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 9 + a + n,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = n$$

이므로

$$9 + a + n = n$$

$$a = -9 \quad \text{-----} \ominus$$

$$f'(x) = 27x^2 - 18x = 9x(3x - 2)$$

이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대이고 $x = \frac{2}{3}$

에서 극소이다.

조건 (나)에 의해

$$f(0) \times f\left(\frac{2}{3}\right) = 5$$

이므로

$$n \times \left(n - \frac{4}{3}\right) = 5$$

$$(3n + 5)(n - 3) = 0$$

n 이 정수이므로

$$n = 3 \quad \text{-----} \ominus$$

$$\ominus \sim \ominus \text{에 의해 } f(x) = 9x^3 - 9x^2 + 3$$

따라서,

$$\begin{aligned} & \int_0^5 xg(x)dx \\ &= \int_0^1 xg(x)dx + \int_1^2 xg(x)dx + \int_2^3 xg(x)dx \\ & \quad + \int_3^4 xg(x)dx + \int_4^5 xg(x)dx \\ &= \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 (x+1)g(x+1)dx \\ & \quad + \int_0^1 (x+2)g(x+2)dx \\ & \quad + \int_0^1 (x+3)g(x+3)dx \\ & \quad + \int_0^1 (x+4)g(x+4)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 (x+1)f(x)dx \\ & \quad + \int_0^1 (x+2)f(x)dx + \int_0^1 (x+3)f(x)dx \\ & \quad + \int_0^1 (x+4)f(x)dx \\ &= 5 \int_0^1 xf(x)dx + 10 \int_0^1 f(x)dx \\ &= 5 \int_0^1 (9x^4 - 9x^3 + 3x)dx \\ & \quad + 10 \int_0^1 (9x^3 - 9x^2 + 3)dx \\ &= 5 \left[\frac{9}{5}x^5 - \frac{9}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\ & \quad + 10 \left[\frac{9}{4}x^4 - 3x^3 + 3x \right]_0^1 \\ &= \frac{21}{4} + \frac{45}{2} \\ &= \frac{111}{4} \end{aligned}$$

따라서 $p = 4$, $q = 111$ 이므로

$$p + q = 4 + 111 = 115$$

정답 115

■ [선택: 기하]

23. ⑤ 24. ④ 25. ② 26. ③ 27. ①
28. ① 29. 40 30. 45

23. 출제의도 : 공간좌표에서 대칭점과 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 B는 점 A(3, 0, -2)를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점이므로

$$B(3, 0, 2)$$

따라서 C(0, 4, 2)이므로

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2 + (2-2)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

정답 ⑤

24. 출제의도 : 쌍곡선의 점근선을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 점근선의 방정식

$$\text{은 } y = \pm \frac{4}{a}x$$

이때, 점근선 중 하나의 기울기가 3이므로, $a > 0$ 이므로

$$\frac{4}{a} = 3$$

$$\text{따라서 } a = \frac{4}{3}$$

정답 ④

25. 출제의도 : 성분으로 나타낸 벡터의 연산을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\vec{p} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} \text{에서}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{p} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

이때, $\vec{a} = (3, 0)$, $\vec{b} = (1, 2)$ 이므로

점 P(x, y)에 대하여 $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$ 라 하면

$$(3, 0) \cdot (x-1, y-2) = 0$$

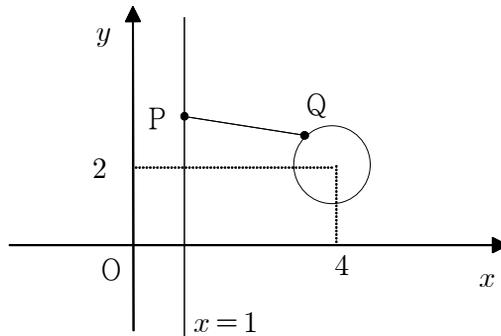
$$3(x-1) = 0$$

$$x = 1$$

그러므로 점 P는 직선 $x=1$ 위의 점이다.

또, $|\vec{q} - \vec{c}| = 1$ 이고 $\vec{c} = (4, 2)$ 이므로

$\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$ 라 하면 점 Q는 중심이 (4, 2)이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.



한편,

$$\begin{aligned} |\vec{p} - \vec{q}| &= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}| \\ &= |\overrightarrow{QP}| \\ &= \overline{PQ} \end{aligned}$$

따라서, 이 값의 최솟값은 원의 중심 (4, 2)와 직선 $x=1$ 사이의 거리에서 반지름의 길이 1을 빼면 되므로

$$3 - 1 = 2$$

정답 ②

26. 출제의도 : 포물선의 정의를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 p의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2 라 하면

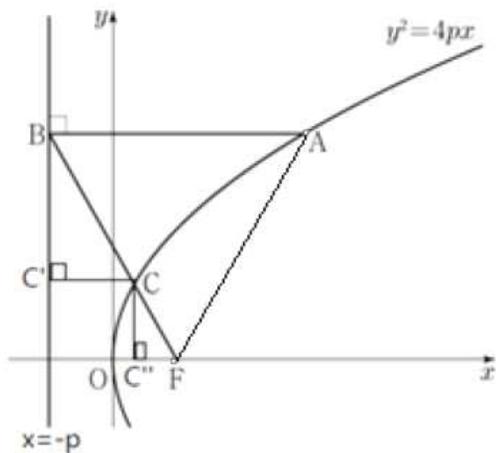
$$\overline{AB} = x_1 + p$$

이때, $\overline{AB} = \overline{BF}$ 이므로

$$\overline{BF} = x_1 + p \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

한편, 점 C에서 포물선의 점근선에 내린 수선의 발을 C'이라 하면

$$\overline{CF} = \overline{CC'} = x_2 + p \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$



이때, $\overline{BC} + 3\overline{CF} = 6$ 이므로 $\textcircled{\ominus}$ 과 $\textcircled{\ominus}$ 에서

$$\begin{aligned} &\overline{BC} + 3\overline{CF} \\ &= \overline{BF} + 2\overline{CF} \\ &= (x_1 + p) + 2(x_2 + p) \\ &= x_1 + 2x_2 + 3p \\ &= 6 \quad \dots\dots \textcircled{\ominus} \end{aligned}$$

한편, $\overline{AB} = \overline{BF}$ 이고 포물선의 정의에 의해 $\overline{AF} = \overline{AB}$ 이므로 삼각형 ABF는 정삼각형이다. 그러므로

$$\angle OFB = 60^\circ$$

이때,

$$\overline{BF} \cos 60^\circ = 2p$$

$$\overline{CF} \cos 60^\circ = p - x_2$$

이므로

$$(x_1 + p) \times \frac{1}{2} = 2p,$$

$$(x_2 + p) \times \frac{1}{2} = p - x_2$$

즉,

$$x_1 = 3p, \quad x_2 = \frac{1}{3}p \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

$\textcircled{\ominus}$ 을 $\textcircled{\ominus}$ 에 대입하면

$$3p + \frac{2}{3}p + 3p = 6, \quad \frac{20}{3}p = 6$$

따라서

$$p = \frac{9}{10}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이의 합의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P'이라 하면 $\overline{AD} \perp$ (평면 BCD)이고

$$\overline{AP'} \perp \overline{BC} \text{이므로}$$

삼수선의 정리에 의해

$$\overline{DP'} \perp \overline{BC} \text{이다.}$$

이때,

$$\overline{AP} + \overline{DP} \geq \overline{AP'} + \overline{DP'}$$

이므로 구하는 최소의 길이는

$$\overline{AP'} + \overline{DP'}$$

이다. 한편, 직각삼각형 BCD에서

$$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{DB} \times \overline{DC} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{DP'}$$

$$\overline{DB} \times \overline{DC} = \overline{BC} \times \overline{DP'}$$

$$2 \times 2\sqrt{3} = 4 \times \overline{DP'}$$

$$\overline{DP'} = \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

이때, 직각삼각형 ADP'에서

$$\begin{aligned} \overline{AP'} &= \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DP'}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= 2\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

⊙과 ⊙에서 구하는 최솟값은

$$\begin{aligned} \overline{AP'} + \overline{DP'} &= 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있고 타원의 정의를 이용하여 삼각형의 변의 길이의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P(2, 3)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1$$

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$$

그러므로 점 S의 좌표는 (8, 0)이다

한편, $c = \sqrt{16 - 12} = 2$ 이므로

F(2, 0), F'(-2, 0)

이때, 두 삼각형 F'FQ, F'SR는

$\angle QF'F = \angle RF'S$ 이고 $\overline{F'Q} // \overline{SR}$ 이므로 닮은 삼각형이다.

한편, $\overline{F'F} = 4$, $\overline{F'S} = 10$ 이므로 두 삼각형 F'FQ, F'SR의 둘레의 길이의 비는

2 : 5

한편, 삼각형 F'FQ의 둘레의 길이는 타 타원의 정의에 의해

$$\overline{FQ} + \overline{QF'} = 2 \times 4 = 8$$

이므로

$$\overline{FF'} + \overline{FQ} + \overline{QF'} = 4 + 8 = 12$$

따라서, 구하는 삼각형 SRF'의 둘레의 길이를 l이라 하면

$$12 : l = 2 : 5$$

이므로

$$l = 30$$

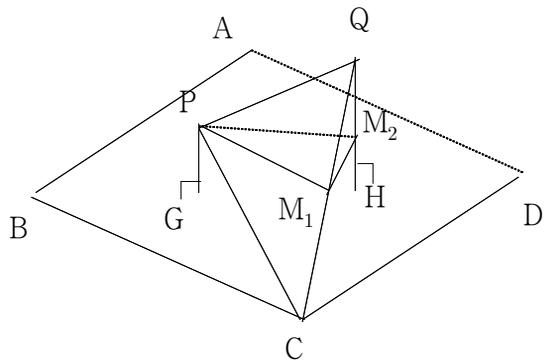
정답 ①

29. 출제의도 : 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{PG} = \sqrt{3}$, $\overline{QH} = 2\sqrt{3}$ 이므로 점 P를 지나고 평면 ABCD와 평행한 평면이 두 선분 QC, QH와 만나는 점을 각각 M₁, M₂라 하면 두 점은 중점이다.

이때, 구하는 평면이 이루는 각은 두 평면 PM₁M₂, PM₁Q가 이루는 각이다.



한편 점P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P', 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 O₁이라 하면

$$\overline{O_1P'} = 4 \cos 60^\circ = 2$$

$$\begin{aligned} \overline{P'G} &= \sqrt{\overline{PP'}^2 - \overline{PG}^2} \\ &= \sqrt{(4 \sin 60^\circ)^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

또, 점 Q에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 Q', 선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심을 O₂라 하면

$$\begin{aligned} \overline{HO_2} &= \sqrt{\overline{QO_2}^2 - \overline{QH}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} \overline{M_1Q'} &= \overline{QM_1} \cos \alpha \\ &= 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{QQ'} &= \sqrt{\overline{QM_1}^2 - \overline{Q'M_1}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{M_2Q'} &= \sqrt{\overline{M_2M_1}^2 - \overline{Q'M_1}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2 \end{aligned}$$

따라서,

$$\cos \theta = \frac{\overline{Q'M_2}}{\overline{QQ'}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

이므로

$$70 \times \cos^2 \theta = 70 \times \frac{4}{7} = 40$$

정답 40

30. 출제의도 : 벡터의 내적의 정의를 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\overrightarrow{AP}| = 1$ 이므로 점 P는 중심이 A(-3, 1)이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

또, $|\overrightarrow{BQ}| = 2$ 이므로 점 Q는 중심이 B(0, 2)이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

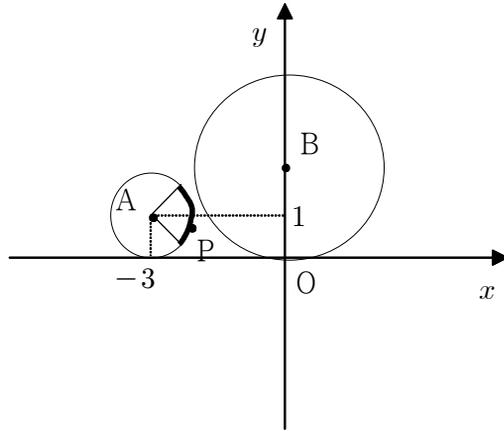
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OC} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 두 벡터 \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{OC} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{OC}| \cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

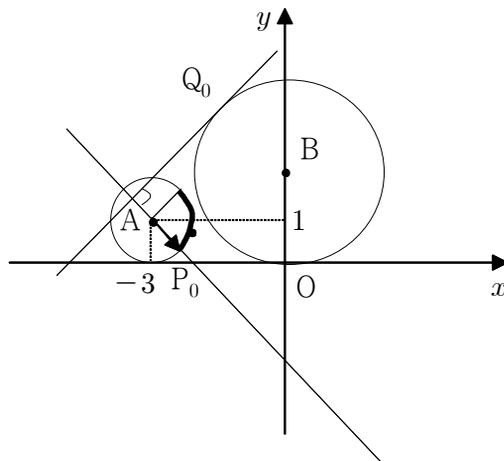
그러므로 점 P를 나타내면 그림과 같다.



또, 두 벡터 \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AQ} 가 이루는 각의 크기를 θ' 이라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \cos \theta' \\ &= |\overrightarrow{AQ}| \cos \theta' \end{aligned}$$

그러므로 이 값이 최소이기 위해서는 점 P는 A를 지나고 직선 기울기가 -1인 직선 위의 점이어야 하고, 점 Q는 이 직선과 수직이면서 원 $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 에 접하는 점 중 제 2사분면의 점이어야 한다.



한편, $\overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{BQ_0} \geq 1$ 에서 두 벡터

$\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{BQ_0}$ 가 이루는 각의 크기를 θ'' 이라

하면

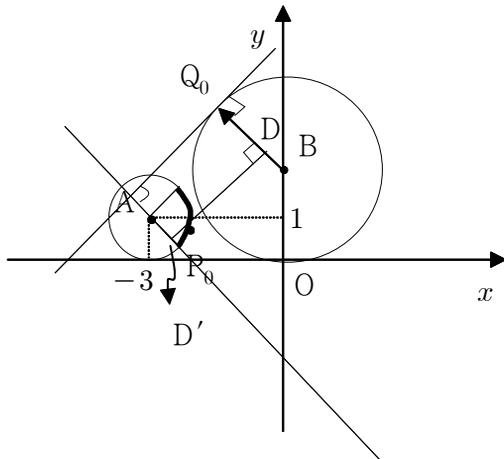
$$|\overrightarrow{BX}| |\overrightarrow{BQ_0}| \cos \theta'' \geq 1$$

$$2|\overrightarrow{BX}| \cos \theta'' \geq 1$$

$$|\overrightarrow{BX}| \cos \theta'' \geq \frac{1}{2}$$

그러므로 선분 BQ_0 위의 점 D 를 $\overline{BD} = \frac{1}{2}$

가 되도록 잡은 후, 점 D 에서 점 A 를 지나고 기울기가 -1 인 직선에 내린 수선의 발을 D' 이라 하면 점 X 는 선분 AD' 위의 점이다.



따라서, $|\overrightarrow{Q_0X}|$ 의 최댓값은 X 가 D' 일 때

가지므로 $|\overrightarrow{Q_0X}|^2$ 의 최댓값은

$$\overline{Q_0D'}^2 = \overline{Q_0D}^2 + \overline{DD'}^2$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (2\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{9}{4} + 8$$

$$= \frac{41}{4}$$

그러므로

$$p + q = 4 + 41 = 45$$

정답 45