

2022학년도 경찰대학 1차 시험

- 수학 -



응시자 유의사항

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.

경 찰 대 학

<http://www.police.ac.kr>

※ 총 8쪽 25문항(3점 5문항, 4점 15문항, 5점 5문항)입니다.
[1~20] 각 문항의 답을 하나만 고르시오.

1. 두 양수 a, b 가

$$\log_b a + \log_a b = \frac{26}{5}, ab = 27$$

을 만족시킬 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a \neq 1, b \neq 1$) [3점]

- ① 240 ② 242 ③ 244 ④ 246 ⑤ 248

2. 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이가 3이고

$$4\cos^2 A - 5\sin A + 2 = 0$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

3. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = at^2 + bt \quad (a, b \text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1, t=2$ 일 때, 점 P의 속도가 각각 15, 20이다.
시각 $t=1$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

- ① $\frac{166}{3}$ ② 56 ③ $\frac{170}{3}$ ④ $\frac{172}{3}$ ⑤ 58

4. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?
(단, a 는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - ax^2}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 - ax} = 2$$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 두 양수 a, b 에 대하여 $0 \leq \log_2 a \leq 2, 0 \leq \log_2 b \leq 2$ 이고 $\log_2(a+b)$ 가 정수일 때, 두 점 $(4, 2)$ 와 (a, b) 사이의 거리의 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라 하자. $m^2 + M^2$ 의 값은? [4점]

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 2a_4, \quad a_3^{\log_2 3} = 27$$

일 때, 집합 $\left\{n \mid \log_4 a_n - \log_2 \frac{1}{a_n} \text{은 자연수}\right\}$ 의 모든 원소의 개수는? [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

7. 실수 k 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 + kx^2 + (2k-1)x + k+3$ 의 그래프가 k 의 값에 관계없이 항상 점 P 를 지난다.

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P 에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$ 와 오직 한 점에서 만난다고 할 때, k 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 자연수 n 과 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 2$ 인 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{f(x)} & (f(x) \neq 0) \\ \frac{1}{n} & (f(x) = 0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 n 의 최솟값은? [4점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

9. 삼차함수 $f(x) = x^3 + x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $(t, f(t))$ 와 $(t+1, f(t+1))$ 에서의 접선의 y 절편을 각각 $g_1(t)$ 와 $g_2(t)$ 라 하자. 함수 $h(t) = |g_1(t) - g_2(t)|$ 의 최솟값은? [4점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

10. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이

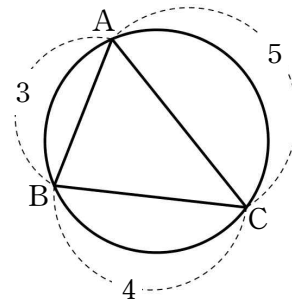
$$a_n = \sum_{k=1}^n k,$$

$$b_1 = 1, b_n = b_{n-1} \times \frac{a_n}{a_n - 1} \quad (n \geq 2)$$

를 만족시킬 때, b_{100} 의 값은? [4점]

- ① $\frac{44}{17}$ ② $\frac{46}{17}$ ③ $\frac{48}{17}$ ④ $\frac{50}{17}$ ⑤ $\frac{52}{17}$

11. 그림과 같이 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 호 AB, 호 BC, 호 CA의 길이가 각각 3, 4, 5 이고 삼각형 ABC의 넓이가 S 일 때, $\frac{\pi^2 S}{9}$ 의 값은? [4점]



- ① $2 - \sqrt{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $1 + \sqrt{3}$
 ④ $2 + \sqrt{3}$ ⑤ $3 + \sqrt{3}$

12. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a 의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_1^x (f(t) + t^2 + 2at - 3) dt \right\} = \int_1^x \left\{ \frac{d}{dt} (2f(t) - 3t + 7) \right\} dt$$

(나) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} = 6$

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

13. 실수 $r = \frac{3}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}$ 에 대하여

$$r + r^2 + r^3 = a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c$$

일 때, $a+b+c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 유리수이다.) [4점]

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

14. 삼각형 ABC 에서 $\angle A = \frac{2\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB} = 6$ 이다. \overline{AC} 와 \overline{BC} 의 합이 24 일 때, $\cos B$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{19}{28}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{21}{28}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{23}{28}$

15. 실수 p 에 대하여 곡선 $y = x^3 - x^2$ 과 직선 $y = px - 1$ 의 교점의 x 좌표 중 가장 작은 값을 m 이라 하자. $m < a < b$ 인 모든 실수 a, b 에 대하여

$$\int_a^b (x^3 - x^2 - px + 1) dx > 0$$

이 되도록 하는 m 의 최솟값은? [4점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

16. 자연수 n 에 대하여 곡선

$$y = n \sin(n\pi x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

위의 점 중 y 좌표가 자연수인 점의 개수를 a_n 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 340 ② 350 ③ 360 ④ 370 ⑤ 380

17. 자연수 n 에 대하여 함수

$$f(x) = |x^2 - 4|(x^2 + n)$$

이 $x=a$ 에서 극값을 갖는 a 의 개수가 4 이상일 때, $f(x)$ 의 모든 극값의 합이 최대가 되도록 하는 n 의 값은? [5점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18. 실수 t ($0 < t < 3$)에 대하여 삼차함수

$$f(x) = 2x^3 - (t+3)x^2 + 2tx$$

가 $x=a$ 에서 극댓값을 가질 때, 세 점 $(0,0)$, $(a,0)$, $(a,f(a))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $g(t)$ 라 하자.

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{g(t)} \int_0^a f(x) dx$ 의 값은? [5점]

- ① 1 ② $\frac{13}{12}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

19. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (\cos x \geq \sin x) \\ \sin x & (\cos x < \sin x) \end{cases},$$

$$g(x) = \cos ax \quad (a > 0 \text{인 상수})$$

이다. 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 에서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 a 의 최솟값을 p 라 하자.

닫힌구간 $\left[0, \frac{11}{12}\pi\right]$ 에서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=\cos px$ 의 교점의 개수를 q 라 할 때, $p+q$ 의 값은? [5점]

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

20. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $P(x), Q(x)$ 에 대하여 두 함수 $f(x)=(x+4)P(x), g(x)=(x-4)Q(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(-4) \neq 0, f(4) \neq 0, g(-4) \neq 0$

(나) 방정식 $f(x)g(x)=0$ 의 서로 다른 모든 해를 크기 순으로 나열한 $-4, a_1, a_2, a_3, 4$ 는 등차수열을 이룬다.

(다) $f'(a_i)=0$ 인 $i \in \{1, 2, 3\}$ 은 하나만 존재하고 모든 $i \in \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $g'(a_i) \neq 0$ 이다.

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점의 x 좌표의 합은? [5점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[21~25] 각 문항의 답을 답안지에 기재하시오.

21. 방정식 $\log_2(x+4) + \log_{\frac{1}{2}}(x-4) = 1$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

22. 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha^n + \beta^n)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^3 a_{3k}$ 의 값을 구하시오. [4점]

23. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$$

이다. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1} = 2$ 일 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

24. 좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C 와 두 점 $A(3, 3)$, $B(0, -1)$ 이 있다.
 실수 $t(0 < t \leq 4)$ 에 대하여 $f(t)$ 를 집합
 $\{X \mid X \text{는 원 } C \text{ 위의 점이고, 삼각형 } ABX \text{의 넓이는 } t\}$
 의 원소의 개수라 하자. 함수 $f(t)$ 가 연속하지 않은 모든 t 의 값의 합을 구하시오. [4점]

25. 두 집합 X, Y 를

$$X = \{\{a_n\} \mid \{a_n\} \text{은 모든 항이 자연수인 수열이고,}$$

$$\log a_n + \log a_{n+1} = 2n\},$$

$$Y = \{a_n \mid \{a_n\} \in X\}$$

라 하자. 집합 Y 의 모든 원소의 합이 $p \times 100$ 일 때, p 의 값을 구하시오. [5점]

※ 확인사항

▷ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입·표기 했는지 확인하시오.