목록

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

상경 계열

모 의 논 술

수험번호 ( ) 성명 ( )

[문제 1번] (가), (나)를 활용하여 ㉠의 긍정적 측면과 부정적 측면을 각각 서술하고, 이 중 부정적 측면을 극복하기 위한 방법을 ㉡을 적용하여 서술하시오. (600자, 50점)

(가) 인류의 역사에서 불안과 지배는 피할 수 없는 삶의 현실이었다. 고고학자들이 형체가 손상된 유골을 통해 추정한 바에 따르면 수렵·채집 사회에서 전쟁의 빈도는 매우 높았으며 이는 학자들이 상상하던 '평화로운 야만인'과는 거리가 먼 것이었다. 한 연구에 따르면 조사된 사회 중 3분의 2에서 적어도 2년에 한 번꼴로 전쟁이 일어났으며, 전쟁을 하지 않은 사회는 전체의 10퍼센트에 불과했다. 수렵·채집사회에 대한 또 다른 연구에 따르면 강력한 권력이 존재하지 않는 '무국가 사회'에서 폭력으로 인한 사망자는 10만 명당 500명 이상으로, 살인으로 인한 사망자가 10만 명당 5명인 오늘날 미국의 100배가 넘는다. 정치철학자 토머스 홉스는 『리바이어던』에서 당시의 삶을 "끊임없는 공포, 폭력적 죽음의 위험, 고독하고 가난하고 끔찍하고 잔인하며 짧은 인간의 삶"으로 묘사하였다. 홉스는 이러한 상황이 모두를 두려워하게 할 공통의 권력이 없는 상태에 기인한다고 보고, ㉠ '거대한 리바이어던'이라 이름 붙인 중앙집권적 권력 창출을 해법으로 제시했다. 리바이어던은 성경에 등장하는 거대한 바다 괴물이다. 홉스는 강력한 리바이어던이 두려운 존재라는 사실을 알고 있었지만, 이것이 모두가 모두를 두려워하는 '만인에 대한 만인의 투쟁'보다 낫다고 생각했다.

(나) 길가메시는 고대 메소포타미아 수메르 왕조 초기 도시 국가인 우루크의 전설적인 왕으로 수많은 신화와 서사시에 등장하는 영웅이다. 수메르인들이 점토판에 기록한 「길가메시 서사시」는 우루크가 상업적으로 번창하였으며 주민들에게 양질의 공공서비스를 제공하였음을 보여준다. 하지만 이 서사시에는 동시에 통제할 수 없는 길가메시의 강력한 힘에 좌절한 우루크 사람들이 신 아누에게 고통을 호소하고 해결책을 요청하는 장면이 등장한다. '길가메시의 문제'라고 일컫는 이 문제에 대해 아누가 제시한 해법은 오늘날의 '견제와 균형'에 해당하는 방식이었다. 아누는 길가메시를 복제하여 만든 엔키두로 하여금 자신의 짝을 저지하도록 했다. 길가메시가 백성에게 행패를 부리자 엔키두가 이를 저지하고 나섰다. 결국 길가메시가 이기기는 했지만 맞설 자가 없었던 길가메시의 위상은 사라졌다. 하지만 이처럼 하늘에서 뚝 떨어진 견제와 균형은 결국 제대로 작동하지 않았다. 둘이 손을 잡고 공모하기 시작했기 때문이다. 신이 그들을 벌하려고 하늘의 황소를 보냈을 때 둘은 힘을 합쳐 황소를 죽여 버렸다. 도플갱어를 통해 국가에 가한 견제와 균형의 제약이 자유를 가져다주지는 못했다. 자유는 국가나 국가를 통제하는 엘리트층이 주는 것이 아니라 개인으로 구성된 사회가 얻어내는 것이다.

(다) '레드 퀸 효과'는 루이스 캐럴의 소설 『거울 나라의 앨리스』에 등장하는 레드 퀸의 말에서 유래한다. 아무리 빨리 달려도 제자리에 머무르는 것을 이상하게 느낀 앨리스가 이상한 나라의 여왕 레드 퀸에게 그 이유를 묻자, 레드 퀸은 그 나라에서는 제자리에 머물려면 최선을 다해 달려야 하며, 어디든 다른 곳으로 가고 싶다면 그보다 두 배는 빨리 달려야 한다고 답한다. 레드 퀸 효과는 환경이 매우 빠르게 변하기 때문에 제자리에 머무르려고만 해도 상당한 노력이 필요하다는 의미로 쓰인다. 이 이야기 속에서 모든 달리기는 헛된 일이지만, ㉡ 레드 퀸 효과는 긍정적인 의미로도 쓰인다. 미국의 생물학자 반 밸런이 각 개체가 끊임없이 서로 자극하며 진화하는 공진화(共進化) 과정을 레드 퀸이라는 말로 설명한 이후, 이 용어는 생물학을 넘어 다른 분야에서도 널리 사용되고 있다. 한 경영학 연구에 따르면 기업이 외부의 자극에 신속하게 대응하는 경우, 이것이 경쟁사의 추가 대응을 유발하여 실적을 하락시키는 측면을 감안하더라도 결국 기업의 실적은 향상되는 것으로 나타났다. 이는 산업계에서 레드 퀸 효과를 통해 나타난 공진화 현상을 보여주는 사례이다.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

다음의 규칙에 따라 동전던지기 게임을 한다.

(가) 게임 시작 시 1점을 부여받는다.

(나) 앞면이 나올 확률이 p, 뒷면이 나올 확률이 $1-p$인 동전을 던진다.
동전을 던지기 전의 점수를 x라 할 때, 던진 후의 점수는 앞면이 나오면 $2x$점, 뒷면이 나오면 $\frac{x}{2}$점이 된다.

(다) 동전 던지기 시행을 8회 반복한 후의 점수가 게임의 최종 점수이다.

1. 게임의 최종 점수를 확률변수 X라고 할 때, $\log_2 X$의 기댓값을 구하시오.

2. 위 확률변수 X의 기댓값이 $\frac{256}{6561}$이 되도록 하는 p의 값을 구하시오.

3. 다음의 규칙 (라)를 추가한다면, $p=\frac{1}{2}$일 때 최종 점수의 기댓값은?

(라) 처음 4회의 동전 던지기를 했을 때, 점수가 1점 미만이면 점수를 1점으로 하고 나머지 4회의 동전 던지기를 시행한다.

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

상경 계열

출제 의도 및 평가 지침

1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

중앙집권적 국가 권력은 국가 구성원을 무질서와 폭력으로부터 보호해 주는 순기능을 갖지만, 동시에 권력이 견제를 받지 않고 비대해질 경우 폭압적이고 독재적인 통치로 흐를 수 있다는 문제점을 갖는다. 이번 상경계 모의 논술은 제시된 자료로부터 국가 권력의 이러한 상반된 두 측면을 파악하고 그 해결 방안을 모색하는 문제이다. 제시문 (가)~(다)는 모두 애쓰모글루, 로빈슨 저 『좁은 회랑』에서 발췌하여 변형한 것으로, (가)는 중앙집권적 권력의 부재 시 발생하는 혼란에 대해, (나)는 국가 권력이 지나치게 강할 때의 문제점에 대해 서술하고 있으며, (다)는 소설에 등장하는 대화로부터 유래한 '레드 퀸 효과'에 대해 설명하고 있다. (가)~(다) 모두 고등학교 수준에서 이해하는 데 어려움이 없는 내용이다.

이 문제에서는 먼저 (가)와 (나)로부터 각각 중앙집권적 권력의 긍정적 측면과 부정적 측면을 파악하여 서술해야 하며, 다음으로 (다)에 등장한 '레드 퀸 효과'의 긍정적 의미를 (가), (나)의 맥락에 적용하여 국가 권력의 부정적 측면을 극복하고 균형 잡힌 국가 권력을 달성하기 위한 방안을 도출해야 한다. 문제의 첫 번째 항목은 제시된 자료에 나타난 국가 권력의 각 측면을 잘 이해하고 있는지 묻고 있으며, 두 번째 항목은 제시된 개념을 중앙집권적 권력이라는 맥락에 적용하여 문제점 해결을 위한 방안을 구성할 수 있는지 묻고 있다.

2. 분석적 평가의 영역, 세부 항목 및 배점

<table>
<tr><th>영 역</th><th colspan="2">항목과 핵심 내용</th><th>배 점</th></tr>
<tr><td>구성과 전개</td><td colspan="2">(가), (나)에 나타난 중앙집권적 권력의 두 측면을 파악하여 서술하는 내용(전반부 300자 내외)과, (다)를 이용하여 중앙집권적 권력의 부정적 측면에 대한 해결책을 모색하는 내용(후반부 300자 내외)을 적절하게 균형을 맞추어 서술</td><td>10%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">내용 이해와 분석</td><td>(가), (나)에 나타난 긍정적·부정적 측면 서술</td><td>○ (가)로부터 중앙집권적 권력이 폭력과 혼란을 막고 질서를 유지하는 순기능을 가짐을 파악
○ (나)로부터 중앙집권적 권력이 견제를 받지 않고 비대해질 경우 독재적 권력으로 변질될 위험이 있음을 파악</td><td>40%</td></tr>
<tr><td>(다)를 (가), (나)의 맥락에 적용하여 해결책 도출</td><td>긍정적 '레드 퀸 효과'를 중앙집권적 권력의 맥락에 적용하여, 국가와 사회가 건전한 긴장 관계를 가지고 경쟁할 때 균형 잡힌 국가 권력을 달성할 수 있음을 설명</td><td>40%</td></tr>
<tr><td>논리와 표현</td><td colspan="2">설명 내용의 정확성과 정합성, 문장 간의 논리적 긴밀성, 자신의 언어로 전환한 표현</td><td>10%</td></tr>
</table>

3. 종합적 평가의 기준과 내용

종합 점수	〈A〉 상-중-하	〈B〉 상-중-하	〈C〉 상-중-하	〈F〉
평가 내용	① (가)로부터 국가 권력의 긍정적 측면을 정확하게 파악하였다. ② (나)로부터 국가 권력의 부정적 측면을 정확하게 파악하였다. ③ (다)의 내용을 (가), (나)의 맥락에 적용하여 올바른 해결책을 도출하였다.	①~③ 중 두 가지 사항은 충분히 만족하였으나 나머지 한 가지의 서술이 다소 미흡함(특히 ③이 주요 채점 포인트임).	①~③ 중 한 가지 사항은 만족하였으나 두 가지 사항이 다소 미흡함.	○ 논지와 상관없이 피상적인 서술에 그친 경우 ○ 300자 미만

4. 형식상의 감점 내용

(1) 분량 및 어문 규범

분량	550자 이상 650자 이내	650자 초과	500자 이상 550자 미만	450자 이상 500자 미만	400자 이상 450자 미만	350자 이상 400자 미만	300자 이상 350자 미만	300자 미만
	감점 없음	-2점	-2점	-4점	-6점	-8점	-10점	-15점

원고지 사용법· 어문규정	상 (0-1개 틀림)	중 (2-5개 틀림)	하 (6개 이상 틀림)
	감점 없음	-1 ~ -2점	-3 ~ -5점

(2) 내용 조직

- 문장과 문장의 연결이 적절하지 못한 경우: -2점
- 단락의 구분이 적절하지 못한 경우: -2점
- 단락 내의 형식적 · 내용적 통일성을 갖추지 못한 경우: -2점

5. 유의 사항

- 주어진 글에 나타난 구절을 그대로 반복해서 사용하고 나열하는 것은 감점 요인임.
- 원고지 사용법과 어문 규정을 적용하되, 감점은 두드러지게 틀린 경우에만 적용함.
- ‘서론-본론-결론’의 형식을 갖추었는지의 여부는 평가에 반영하지 않음.

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 모의논술고사		
상경 계열	**출제 의도 및 평가 지침**	2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학 교육을 정상화하기 위하여 철저하게 교과서를 중심으로 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분히 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 수학 I 범위에 속하는 로그, 확률과 통계 범위에 속하는 독립시행, 확률변수, 확률분포, 이산확률변수의 기댓값, 이항분포 등의 개념을 포괄적으로 이해하고 있는지를 물었다. 해당 개념을 잘 숙지하여 구체적인 예시에 적용할 수 있는지를 확인하였다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	$\log_2 X$의 기댓값을 계산 가능한 형태로 기술하였는가?	15
		$\log_2 X$의 기댓값을 정확히 계산하였는가?	15
2	30	$\mathrm{E}(X)$를 p에 대한 식으로 잘 나타내었는가?	20
		p의 값을 잘 구하였는가?	10
3	40	동전 던지기를 처음 4회 시행하고 규칙 (라)를 적용했을 때의 확률분포를 제대로 구하고, 이 확률분포의 기댓값을 잘 계산하였는가?	20
		$p=\frac{1}{2}$일 때, 게임 최종 점수의 기댓값을 잘 구하였는가?	20

3. 출제 근거

홍성복 외, 고등학교 수학 I, 천재교육
- 로그의 뜻과 성질, p.26

고성은 외, 고등학교 확률과 통계, 좋은책 신사고
- 사건의 독립과 종속, p.63
- 확률변수와 확률분포, p.79
- 이산확률변수의 평균과 표준편차, p.84
- 이항분포, p.91

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시		
상경 계열	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

1. 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면

$$X = 2^Y \left(\frac{1}{2}\right)^{8-Y} = 2^{2Y-8},\ \text{즉},\ \log_2 X = 2Y - 8$$

따라서

$$\mathrm{E}(\log_2 X) = \mathrm{E}(2Y-8) = 2\mathrm{E}(Y) - 8 = 2 \cdot 8p - 8 = 16p - 8$$

2. 동전을 던지기 전의 점수를 x라 할 때, 던진 후의 점수의 기댓값은

$$2x \cdot p + \frac{x}{2} \cdot (1-p) = \left(2p + \frac{1}{2}(1-p)\right)x$$

게임 시작 시 1점을 부여받고, 서로 독립인 동전 던지기 시행을 8회 반복하므로

$$\mathrm{E}(X) = \left(2p + \frac{1}{2}(1-p)\right)^8 = \frac{(3p+1)^8}{2^8}$$

주어진 조건에 의해

$$\mathrm{E}(X) = \frac{(3p+1)^8}{2^8} = \frac{256}{6561} = \frac{2^8}{3^8}$$

따라서 $3p + 1 = \frac{4}{3}$. 즉, $p = \frac{1}{9}$

3. 일반적인 p에 대하여, 처음 4회의 동전 던지기를 한 뒤 점수가 1점 미만이면 점수를 1점으로 조정하였을 때의 확률분포는 다음과 같다.

최종 점수	16	4	1
확률	p^4	${}_4\mathrm{C}_1 p^3(1-p) = 4p^3(1-p)$	$1 - p^4 - 4p^3(1-p)$

이 확률변수의 기댓값은

$$16p^4 + 4 \cdot 4p^3(1-p) + (1 - p^4 - 4p^3(1-p))$$

동전을 던지기 전의 점수를 x라 할 때, 동전을 4회 던진 후의 점수의 기댓값은

$$\left(2p + \frac{1}{2}(1-p)\right)^4 x$$

따라서 게임의 최종 점수의 기댓값은

$$\left(2p + \frac{1}{2}(1-p)\right)^4 \left[16p^4 + 4 \cdot 4p^3(1-p) + (1 - p^4 - 4p^3(1-p))\right]$$

$p = \frac{1}{2}$일 때, 이 값은

$$\left(\frac{5}{4}\right)^4 \left(1 + 1 + \frac{11}{16}\right) = \frac{625}{256} \cdot \frac{43}{16} = \frac{26875}{4096}$$

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/4

강력한 권력은 사람들 사이의 혼란을 진정시키고, 무질서한 사회에 질서를 부여함으로써 사회를 안정화시켰다. 자신의 이득을 최고로 여겨 이득을 취하기 위해 남에게 피해를 주는 것을 마다하지 않던 인간들이, 자신보다 더 높은 자리에서 자신에게 벌을 내리고, 해할 수 있는 강력한 권력은 사람들에게 새롭지만 무엇보다 강한 두려움으로 다가왔을 것이다. 강력한 권력은 질서를 부여해 사람들의 자유를 제한하는 것처럼 보이기도 하지만, 사람들 간의 공포를 줄임으로써 다른 자유를 부여하는 것이기도 하다. 자신의 이득을 최대로 취하기 위해 그 강력한 권력에 복종하고 따름으로써 사회는 안정되었을 것이다. 그러나 길가메시와 엔키두처럼 통제되지 않는 강력한 권력은 독재로 변질되어 그 사회에 또다른 혼란을 야기할것이다. 따라서 개인은 권력에 무조건 복종하고 의존하는 것이 아니라 국가를 견제하며 개인으로 구성된 사회가 잘못된 권력에는 대항할 수도 있어야 하고, 권력은 사회를 통제할 수 있어야 한다. 사회가 권력에 대항하여 견제하고, 권력이 사회를 견제하며 통제할 때 서로가 서로를 자극하고 견제하며 국가를 발전시킬 수 있다. 견제 없이 복종 또는 무질서만 있을 때, 국가는 발전할 수 없다.

한양대학교 답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/3

[문제 2-1]

각 X값과 $\log_2 X$값은 다음과 같다

X	2^{-8}	2^{-6}	2^{-4}	2^{-2}	1	2^{2}	2^{4}	2^{6}	2^{8}
$\log_2 X$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

$\log_2 X$의 기댓값은 각 $\log_2 X$값에 $P(X=x)$를 곱한 뒤 더한다.

$$E(\log_2 X) = \sum_{k=0}^{8} {}_8C_k (p)^k (1-p)^{8-k} \times (2k-8)$$

$$= 2\sum_{k=0}^{8} \left\{ {}_8C_k (p)^k (1-p)^{8-k} \times k \right\} - 8$$

(이항정리 이용) $= 2 \times \left(8 \times p \times (1)^7 \right) - 8$

$= 16p - 8$

한양대학교
답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/3

[문제 2-2]

X의 기댓값은 $\sum_{k=0}^{8} {}_8C_k (p)^k (1-p)^{8-k} \times 2^{2k-8}$

$$= \sum_{k=0}^{8} {}_8C_k (p)^k (1-p)^{8-k} \times 2^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{8-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{8} {}_8C_k (2p)^k \left(\frac{1-p}{2}\right)^{8-k}$$ 이다

이항 정리에 따라 $\sum_{k=0}^{8} {}_8C_k (2p)^k \left(\frac{1-p}{2}\right)^{8-k}$

$$= \left(2p + \frac{1-p}{2}\right)^8$$

$$= \left(\frac{3p+1}{2}\right)^8 = \frac{256}{6561} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$ 이므로

$\frac{3p+1}{2} = \frac{2}{3}$ $\quad \therefore p = \frac{1}{9}$

한양대학교

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/3

[문제 2-3] 앞면이 나오는 상황: A

뒷면이 나오는 상황: B

조건(라) : 처음 4회중 A의 수 < B의 수 → 1점으로 함

처음 4회중 i) B가 4번

B B B B : $\frac{1}{16}$ → 1점

ii) B가 3번

B B B A : $\frac{4}{16}$ → 1점

iii) B가 2번 : $\frac{6}{16}$ → 1점

- $2^4 \rightarrow \frac{1}{16}$
- $2^2 \rightarrow \frac{4}{16}$
- $1 \rightarrow \frac{6}{16}$
- $2^{-2} \rightarrow \frac{4}{16}$
- $2^{-4} \rightarrow \frac{1}{16}$

iiii) B가 1번 : $\frac{4}{16}$ → 2^2점

- $2^6 \rightarrow \frac{1}{16}$
- $2^4 \rightarrow \frac{4}{16}$
- $2^2 \rightarrow \frac{6}{16}$
- $2^0 \rightarrow \frac{4}{16}$
- $2^{-2} \rightarrow \frac{1}{16}$

iiiii) B가 0번 : $\frac{1}{16}$ → 2^4점

$2^8 \rightarrow \frac{1}{16}$

$2^6 \rightarrow \frac{4}{16}$

$2^4 \rightarrow \frac{6}{16}$

$2^2 \rightarrow \frac{4}{16}$

$2^0 \rightarrow \frac{1}{16}$

X	2^{-4}	2^{-2}	1	2^2	2^4	2^6	2^8	합계
$P(X=x)$	$\frac{11}{256}$	$\frac{48}{256}$	$\frac{83}{256}$	$\frac{72}{256}$	$\frac{33}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$	1

이므로 $E(X) = 6 + \frac{2299}{4096}$

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/4

제시문 (가)와 (나)를 통해 알 수 있는 ㄱ의 긍정적인 측면은 생명을 위협받는 불안한 상태에서 벗어날 수 있다는 것이다. 절대적 권력자의 통치 아래에서 사람들이 가장 중요하게 생각하는 생명권을 보장받을 수 있다는 점에서 긍정적이다. 반면 부정적인 측면으로는 독재의 위험이 있다는 것이다. 제시문 (나)를 보면 길가메시의 강력한 힘에 고통받는 모습과 이를 견제하기 위해 내세운 또 다른 권력자가 같이 공모하여 독재를 유지하는 모습을 볼 수 있다. 이처럼 권력을 한 사람이 가지고 있는 것이 남용의 수단으로 사용될 수 있다는 것을 알 수 있다. 이것을 극복하기 위한 방법은 레드 퀸 효과처럼 강력한 권력인 리바이어던에 대해서 사회가 협력해서 힘을 키우고 함께 달리며 우위를 차지하는 쪽이 없게 하는 것이다. 권력에 대한 견제 장치를 마련해야 하는데 이것은 사회의 협력만이 가능하다. 정치에 시민들이 참여하면서 리바이어던이 존재하되 사회를 제압할 수 없고, 시민들 또한 리바이어던을 제압할 수 없다. 이를 통해 리바이어던의 긍정적인 측면인 국가의 통제와 보호를 유지하면서 독재를 방지할 수 있다.

한양대학교

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/4

한양대학교

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/3

[문제 2-1]

X	2^{-8}	2^{-6}	2^{-4}	$\cdots$	2^{6}	2^{8}
$\log_2 X$	-8	-6	-4	$\cdots$	6	8
P	${}_8C_8(1-p)^8$	${}_8C_7\cdot p\cdot(1-p)^7$	${}_8C_6\cdot p^2(1-p)^6$	$\cdots$	${}_8C_1 p^7(1-p)$	${}_8C_0 p^8$

$E(\log_2 X)$

$= -8\times{}_8C_8(1-p)^8 - 6\times{}_8C_7 p(1-p)^7 - 4\times{}_8C_6 p^2(1-p)^6 + \cdots + 6\times{}_8C_1 p^7(1-p) + 8\times{}_8C_0 p^8$

$= \sum_{k=0}^{8}(-8+2k)\,{}_8C_k p^k(1-p)^{8-k}$

$= -8\times\sum_{k=0}^{8}{}_8C_k p^k(1-p)^{8-k} + 2\sum_{k=0}^{8}k\,{}_8C_k p^k(1-p)^{8-k}$

$= -8\times 1 + 2\sum_{k=1}^{8}\boxed{k\times{}_8C_k}\,p^k(1-p)^{8-k}$

$k\times{}_8C_k = 8\times{}_7C_{k-1}$

$= -8 + 2\sum_{k=1}^{8} 8\times{}_7C_{k-1}\,p^k(1-p)^{8-k}$ $r=k-1$ 치환

$= -8 + 16p\boxed{\sum_{r=0}^{7}{}_7C_r\,p^r(1-p)^{7-r}}$

$= \boxed{-8+16p}$

한양대학교

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/4

한양대학교

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/3

[문제 2-2]

a_n : n회 시행 후 정수의 기댓값

$$a_{n+1} = p \times 2a_n + (1-p) \times \frac{1}{2} a_n$$

$$= \left(\frac{3}{2}p + \frac{1}{2}\right) a_n$$

$a_0 = 1$ 이므로

$$a_n = \left(\frac{3}{2}p + \frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_8 = \left(\frac{3}{2}p + \frac{1}{2}\right)^8$$

$$\left(\frac{3p+1}{2}\right)^8 = \frac{256}{6561} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

$$\frac{3p+1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow 9p+3 = 4 \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{9}}$$

한양대학교

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/4

한양대학교

답안지 (상경계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/3

[문제 2-3]

4회까지

앞 4, 뒤 0: $X_4 = 2^4$, $p = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_4$

앞 3, 뒤 1: $X_4 = 2^2$, $p = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_3$

앞 2, 뒤 2: $X_4 = 1$, $p = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_2$

앞 1, 뒤 3: $X_4 = 1$, $p = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_1$

앞 0, 뒤 4: $X_4 = 1$, $p = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_0$

$X_4 = 1$ 일때, $p = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times ({}_4C_2 + {}_4C_1 + {}_4C_0)$

8회 후,

$X_8 = 2^{-4}$, $p = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$X_8 = 2^{-2}$, $p = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_4C_0 \times {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$X_8 = 1$, $p = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_1 \times {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_4C_0 \times {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$X_8 = 2^2$, $p = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_2 \times {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_4C_1 \times {}_4C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$X_8 = 2^4$, $p = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_3 \times {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_4C_2 \times {}_4C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$X_8 = 2^6$, $p = {}_4C_4 \times {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_4C_3 \times {}_4C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$X_8 = 2^8$, $p = {}_4C_4 \times {}_4C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$$11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \sum_{n=0}^{4} 2^{-4+2n} \times {}_4C_n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4-n} + {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \sum_{n=0}^{4} 2^{-2+2n} \times {}_4C_n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4-n}$$

$$+ {}_4C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \sum_{n=0}^{4} 2^{2n} \times {}_4C_n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4-n}$$

$$= \left(11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \times \sum_{n=0}^{4} 4^n \times {}_4C_n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{4-n} = \frac{11+16+16}{2^8} \sum_{n=0}^{4} {}_4C_n \left(\frac{4}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{4-n}$$

$$= \frac{43}{2^8}\left(\frac{4}{2} + \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{43}{2^8} \times \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \boxed{43 \times \frac{5^4}{2^{12}}}$$

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

인문 계열

모 의 논 술

수험번호 (   )   성명 (   )

[문제] (가)에서 ㉠의 이유를 추론하고, 그 맥락에서 (나)의 ‘그, / 어떤, / 문’과 ‘키위새’가 각각 표상하고 있는 바가 무엇인지를 해석하여 제시한 후, (다)의 두 자료를 모두 활용하여 (가)의 ㉡에 답하는 글을 쓰시오. (1200자, 100점)

(가)

우리가 읽는 행위를 하기 위해서는 뉴런의 연결망이 음속 수준으로 빠르게 자동 반응하며 뇌 구조 전역에 걸쳐 시각·인지·언어 영역 등에 연결이 일어나야 한다. 이때 뇌의 좌우 반구에 있는 4개 엽과 5개 층은 모두 사용되며 새로운 입력값을 수용한다.

그런데 이와 같은 인간의 문해력(文解力, literacy), 곧 글을 읽고 쓰는 능력은 생득적인 것이 아니다. 문해력은 호모사피엔스의 가장 중요한 후천적 성취 중 하나다. 6,000년 전에야 인류는 문자 문화를 개화해 뇌에 새로운 회로를 더하기 시작했다. 문제는 6,000년간 진화해 온 ‘읽는 뇌’는 디지털 기기의 등장과 함께 그 능력이 퇴화하고 있다는 점에 있다. 선천적인 능력이 아니라 후천적으로 습득된 문화적 능력이기에 퇴화할 수 있는 것이다. 노르웨이의 한 연구에 따르면 같은 책을 종이책으로 읽은 학생이 전자책 단말기 킨들로 읽은 학생보다 줄거리를 시간 순으로 재구성하는 능력이 더 뛰어났다. ㉠이는 종이책과 다른 물성을 지니고 있는 디지털 기기가 데이터나 정보의 습득에는 매우 편리한 환경을 제공해 주지만 그것이 곧 지식을 익히는 데에도 유리한 환경이 되는 것은 아님을 말해준다.

㉡그렇다면 과연 디지털 기기에 의존하는 우리 인간들의 삶은 어떻게 변하게 될 것인가? 그러한 변화에 우리는 어떻게 대응해야 할 것인가?

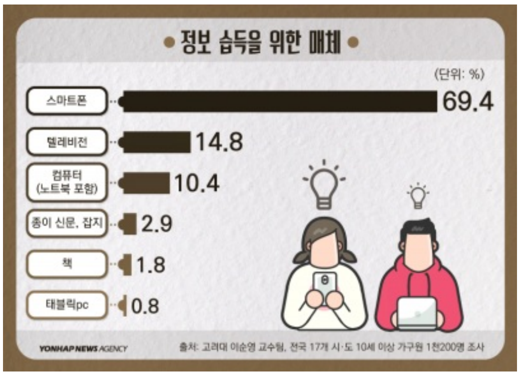
(나)

이제 어디를 가나 아리바바의 참깨
주문 없이도 저절로 열리는
자동문 세상이다.
언제나 문 앞에 서기만 하면
어디선가 전자 감응 장치의 음흉한 혀끝이
날름날름 우리의 몸을 핥는다 순간
스르르 문이 열리고 스르르 우리들은 들어간다.
스르르 열리고 스르르 들어가고
스르르 열리고 스르르 나오고
그때마다 우리의 손은 조금씩 퇴화하여 간다.
하늘을 멀뚱멀뚱 쳐다만 봐야 하는
날개 없는 **키위새**
머지않아 우리들은 두 손을 잃고 말 것이다.
정작, 두 손으로 힘겹게 열어야 하는
그,
어떤,
문 앞에서는
키위키위 울고만 있을 것이다.

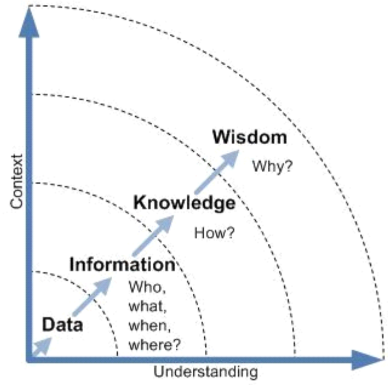
-유하, <자동문 앞에서>

뒷면에 계속 ☞

(다)



[그림 1] 정보 습득을 매체 활용 현황



[그림 2] 데이터, 정보, 지식, 지혜의 위계

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

인문 계열

출제 의도 및 평가 지침

■ 출제 의도 및 문제 해설

이번 모의논술 문제는 디지털 기기에 의존한 읽기 행위가 지닌 문제가 무엇인가에 대한 성찰을 바탕으로 이에 대한 대응 방안을 모색하도록 하는 방향으로 설계되었다. 지문 (가)의 맥락에서 (나)의 시에 포함된 함축적 의미를 해석하도록 하였고, (다)의 두 가지 자료를 모두 활용해서 답안을 작성하도록 하였다. 이러한 과정에서 경험에 근거한 합리적 이유를 추론하는 능력, 주어진 맥락에 비추어 함축성 높은 시어의 의미를 해석하는 능력, 자료를 활용하여 자신의 의견을 논증하는 능력을 두루 평가하고자 하였다. 지문 (가)는 메이런 울프의『다시, 책으로』에 있는 내용을 재구성한 것이고, (나)는 유하의 시 작품이며, (다)는 연구 논문 및 학술 저서에서 인용한 것이다. 고등학교 사회·문화 교과서의 '사회 변동', 그중에서도 '정보 사회'의 내용을 참고하였으며, 고등학교 독서 교과서의 '정보화 시대의 독서 생활' 단원과의 연계를 실현하고자 하였다. 지문이 교과서에 실려 있는 글은 아니지만 교육과정을 정상적으로 공부한 고등학생이라면 별 어려움 없이 글의 핵심 내용을 이해하고 이를 바탕으로 자신의 의견을 개진할 수 있도록 구성되었다.

1. 평가의 내용

1) (가)의 ㉠에 명시되어 있지 않은 정보를 경험과 문맥에 근거하여 추론하였는지 여부
2) (가)의 맥락에서 (나)의 주요 시어인 '그, 어떤, 문'과 '키위새'의 함축적 의미를 해석하였는지 여부
3) 이를 바탕으로 디지털 기기에 의존하는 우리 인간들의 삶의 변화와 이에 대한 대응 방안을 (다)의 두 자료를 모두 활용하여 제시했는지 여부

2. 분석적 평가의 영역, 세부 항목 및 배점

<table>
<tr><th>영 역</th><th colspan="2">항목과 핵심 내용</th><th>배 점</th></tr>
<tr><td>구성과 전개</td><td colspan="2">(가)에 숨어 있는 정보를 추론하여 제시하고, (가)의 맥락에서 (나)의 주요 시어인 '그, 어떤 문'과 '키위새'의 함축적 의미를 해석한 후, 이를 바탕으로 디지털 기기에 의존하는 우리 인간들의 삶의 변화와 이에 대한 대응 방안을 (다)의 두 자료를 모두 활용하여 설득력 있게 제시하였다.</td><td>20</td></tr>
<tr><td rowspan="3">분석적인 추론, 상징적 의미의 발견 및 창의적인 대응 방안 제시</td><td>분석적인 추론</td><td>(가)의 ㉠에 명시되어 있지 않은 정보를 경험과 문맥에 근거하여 추론하여 제시한다.</td><td>20</td></tr>
<tr><td>상징적 의미의 발견</td><td>(나)를 (가)의 맥락에 대입하여 '그, 어떤, 문'과 '키위새'의 상징적 의미를 발견하여 제시한다.</td><td>25</td></tr>
<tr><td>창의적인 대응 방안 제시</td><td>이상을 바탕으로 디지털 시대를 살아가는 지혜로운 방안을 합리적으로 설득력 있게 기술한다.</td><td>25</td></tr>
<tr><td>문장과 표현</td><td colspan="2">정확한 단어 및 표현 선택, 자연스러운 문장 구성, 문장 및 단락 사이의 유기적 연결을 평가한다.</td><td>10</td></tr>
</table>

3. 종합적 평가의 기준과 내용

종합 점수	〈A〉 상-중-하	〈B〉 상-중-하	〈C〉 상-중-하	〈F〉
평가 내용	① (가)의 ㉠에 명시되어 있지 않은 정보를 경험과 문맥에 근거하여 추론하여 제시한다. ② (나)를 (가)의 맥락에 대입하여 ‘그, 어떤, 문’과 ‘키위새’의 상징적 의미를 발견하여 제시한다. ③ 이상을 바탕으로 디지털 시대를 살아가는 지혜로운 방안을 합리적으로 설득력 있게 기술한다.	① ~ ③의 내용 중 한 가지의 서술이 다소 미흡한 경우	① ~ ③의 내용 중 두 가지의 서술이 다소 미흡한 경우	- 한 가지만 충족하거나 논제와 상관없이 피상적 나열에 그친 경우 - 700자 미만

4. 형식상의 감점 내용

(1) 분량 및 어문 규범

<table>
<tr><td rowspan="2">길이</td><td>1,150자 이상
1,250자 이내</td><td>1,250자
초과</td><td>1,000자 이상
1,150자 미만</td><td>950자 이상
1,000자 미만</td><td>900자 이상
950자 미만</td><td>850자 이상
900자 미만</td><td>800자 이상
850자 미만</td><td>750자 이상
800자 미만</td></tr>
<tr><td>감점 없음</td><td>-1점</td><td>-1점</td><td>-2점</td><td>-4점</td><td>-6점</td><td>-8점</td><td>-10점</td></tr>
<tr><td rowspan="2">원고지
사용법·
어문규정</td><td colspan="3">상(0-2개 틀림)</td><td colspan="3">중(3-5개 틀림)</td><td colspan="2">하(6개 이상 틀림)</td></tr>
<tr><td colspan="3">감점 없음</td><td colspan="3">-1 ~ -2점</td><td colspan="2">-3 ~ -5점</td></tr>
</table>

(2) 내용 조직

- 문장과 문장의 연결이 적절하지 못한 경우: -2점
- 단락의 구분이 적절하지 못한 경우: -2점
- 단락 내의 형식적 · 내용적 통일성을 갖추지 못한 경우: -2점

5. 유의 사항

- 주어진 글에 나타난 구절을 그대로 반복해서 사용하고 나열하는 것은 감점 요인이다.
- 원고지 사용법과 어문 규정을 적용하되, 감점 처리는 두드러지게 틀린 경우에 반영한다.
- ‘서론-본론-결론’의 형식을 갖추었는지의 여부는 평가에 반영하지 않는다.
- 대응 방안에 대한 평가에서는 창의성과 논리성을 중점적으로 판단한다.

답안지 (인문계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/1

(가)의 필자는 인간의 문해력은 생득적인 것이 아닌 후천적 성취라고 주장하며 현대 기술 발전에 의한 문해력의 퇴화에 대한 내용을 연구를 통해 제시한다. 필자는 ㉠의 이유인 디지털 기기를 통한 학습은 학생들에게 편리한 환경을 제공하여 주지만, 이로 인해 뉴런의 연결망의 반응 속도가 영향을 미쳐 재구성 능력이 퇴화되어 지식 습득 환경 조성에 악영향을 미쳐 유리한 환경만을 제공하지 못한다는 점을 통해서 현대인들의 디지털 기기 의존 문제에 대한 의식을 상기시킨다.

(나)는 현대 문명에 길들여진 퇴화된 현대인들을 비판한다. (나)의 '키위새'를 ㉠에 입각해 바라보면, 날개가 없는 퇴화되어진 생명체, 즉 현대문명에 길들여진 퇴화된 현대인들을 표상한다. 이와 동등하게 ㉠에 입각하면 (나)의 '그,/어떤,/문'은 현대인이 수동적 면모로 행하는 것이 아닌, 직접 자의적으로 행해서 해결하여야 하는 상황을 표상한다.

(다)의 ［그림 1］은 정보 습득 매체 활용 수치에 가장 높은 수치를 보이는 디지털 기기인 스마트폰은 종이로 이루어진 매체인 종이 신문, 잡지, 책과 상반되는 수치를 보인다. ［그림 2］의 DIKW 모형은 정보보다 지식, 지식보다 지혜의 가치가 더 높고 체계적이라는 것을 보여준다.

㉡의 첫 번째 질문을 (다)의 두 그림에 근거해 답하면, 사람들의 디지털 기기 의존도는 더욱 더 높아져 디지털 기기 산업의 발전이 이루어진 삶을 살아갈 것이다. 반면에 종이로 이루어진 매체의 이용은 감소하여 관련된 산업체는 퇴화되어지는 현상이 나타난다. 또한, 인간의 삶에서 데이터와 정보가 늘어나지만 재구성 능력이 퇴화하여 지혜로 변환시키지 못해 사람들은 살아가면서 삶의 지혜를 깨닫기 어려워질 것이다.

한편, 이런 변화에 대응하기 위한 모습을 (다)를 통해 제시하면, 개인적 측면으로는 디지털 기기에 대한 의존도를 낮추기 위해 디지털 매체의 부정적 측면을 인식하고, 종이로 이루어진 매체를 이용하려는 노력과 데이터를 얻고 자신의 생각을 반영하여 데이터를 지혜로 만들려고 하는 노력이 필요하다. 사회적 측면으로는 사람들에게 디지털 기기 의존 문제에 대한 심각성을 상기시켜 의존도를 낮추려고 하는 노력이 필요하며, 종이로 이루어진 매체에 대한 지원과 사람들이 관심을 잃지 않도록 캠페인 실시와 교육 제도 활용과 같은 다양한 방안을 통해서 위에서 제시한 변화되어진 인간들의 삶에서 나타날 수 있는 문제에 대응할 수 있을 것이라고 생각한다.

답안지 (인문계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/1

제시문 (가)는 디지털 기기를 쉽게 접할 수 있게 됨으로서 문해력이 퇴화되고 있음을 시사한다. 디지털 기기가 종이책에 비해 정보를 습득하는 데에는 편리하지만, 지식을 익히는 데에도 유리하지 않은 이유는 '습득'에 그치기 때문이다. 단순히 내용을 읽는 것에 그치지 않고 스스로 내용을 곱씹어 보며 자신만의 언어로 재해석, 즉 복습을 통해 독자는 내용을 완벽하게 이해하게 된다. 같은 내용을 종이책으로 읽은 학생이 전자책으로 읽은 학생보다 이 능력이 더 뛰어난 이유는 '감각'이 이해력에 큰 영향력을 행사하기 때문이다. 스크롤해서 내려 읽어가는 전자책에서는 텍스트가 똑같은 위치에서 계속 반복되기 때문에 특정 구간이 인상적이지도, 기억에 남지도 않는다. 반면, 종이책은 책장을 넘기고 읽는 위치가 계속해서 바뀌는 등 동작을 요구한다. 또한 실체가 존재하기 때문에 인상적인 부분에 표시를 할 수도 있다. 이러한 사소한 감각적 요소들이 독자의 집중력과 이해도에 기여하며, 디지털 기기에 의존하는 것은 문해력에 악영향을 미친다.

이 맥락에서 제시문 (나)의 '키위새'는 디지털 기기에 의존하는 인간을 표상한다. 날개가 없어 하늘을 멀뚱멀뚱 바라보기만 하는 키위새와 같이, 한때는 눈부신 발전을 이루어 냈던 손은 점차 퇴화해 우리는 날개 잃은 새가 될 것이다. 결국 스스로는 아무것도 할 수 없게 될 것이며, 언젠가 '그, / 어떤, / 문' 앞에서는 주저앉고 말 것이다. '그, / 어떤, / 문'은 디지털 기기가 도와줄 수 없는 영역을 표상한다. 생활의 모든 분야에서 디지털 기기의 도움을 받지만, 우리가 혼자 해내야만 하는 것에 닥치면 무너질 수 밖에 없다. 아무런 동작을 하지 않아도 내용을 떠먹여 주는 전자책의 독자들과 같이, 점점 디지털 기기에 의존하는 인간은 무능력해져 갈 것이다.

디지털 시대에 접어들며 디지털 기기는 우리 생활에서 뗄 수 없는 존재가 되었다. 이미 정보 습득을 위한 매체로 스마트폰이 압도적으로 많고, 2위와 3위 또한 디지털 매체이다. 앞으로 우리의 삶에서 디지털 기기가 차지하는 비중은 늘어날 것이며, 현재 인간의 영역으로 남아있는 사소한 것까지도 디지털 기기가 대체할 것이다. 이에 따라 인간의 퇴화를 막기 위해서는 단순히 데이터 습득에 그치지 않고 정보를 분류하여 인식하고, 스스로에게 '어떻게? 왜?' 등의 질문을 던지며 생각을 확장해 나가야 한다. '데이터' 단계에서 머무르지 않고 정보, 지식, 지혜의 다음 단계로 넘어갈 수 있도록 생각의 힘을 길러주는 다양한 교육을 실시해야 한다.

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자연 계열

모 의 논 술

수험번호 (   )   성명 (   )

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

(가) 함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$ (L, M은 실수)일 때, a가 아니면서 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

① $f(x) \leq g(x)$이면 $L \leq M$

② $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$이고 $L = M$이면, $\lim_{x \to a} h(x) = L$

(나) 정적분과 급수의 합 사이의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \left(단, \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x \right)$$

(다) 연속함수 $f(x)$는 다음 식을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)\,dx = n\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx$$

1. 극한값 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$을 구하시오.

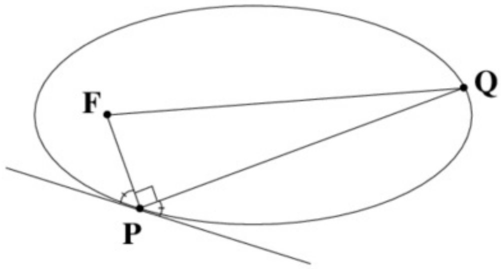
2. 극한값 $\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4 \left(\frac{k}{n} - x\right)dx \right]$와 $\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4 \left(\frac{k}{n} - x\right)dx \right]$을 구하시오.

3. 극한값 $\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5\,dx \right]$을 구하시오.

뒷면에 계속 ☞

[문제 2] **다음 물음에 답하시오. (50점)**

1. 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2인 타원 모양의 당구대 위의 한 초점 F에 공이 놓여 있다. 이 공을 쳤을 때 그림과 같이 공은 타원 둘레의 점 P를 지나 점 Q에 닿았다. 이때 점 F, P를 지나는 직선과 점 P에서의 접선이 이루는 예각과 점 P, Q를 지나는 직선과 점 P에서의 접선이 이루는 예각은 서로 같다. $\angle\mathrm{FPQ} = \dfrac{\pi}{2}$일 때, 삼각형 FPQ의 넓이를 구하시오.



2. 다항함수 $f(x)$가 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3} = 4$, $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{f(x)} = -\frac{1}{7}$을 만족시킬 때, $-2 \le t \le 2$인 t에 대하여 $g(t) = \displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$라 하자. $g(t)$의 최솟값을 구하시오.

3. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 시각 t에서의 위치가

$$x = 2\cos t, \quad y = \sin t$$

일 때, 시각 t에서의 점 P의 속력을 $f(t)$, 가속도의 크기를 $g(t)$라 하자. $0 \le t \le 2$인 t에 대하여 $\dfrac{f(t)}{g(t)}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자연 계열 | **출제 의도 및 평가 지침** | 1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

함수의 극한, 정적분의 활용, 정적분과 급수와의 관계, 평균값 정리 등을 잘 이해하고 있는지를 묻는 문제들로 구성되어 있다. 제시문에 주어진 함수의 극한의 관계부등식과 정적분과 급수의 관계식을 적절히 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻고 있다. 중요한 기본개념을 잘 이해하고 적절히 활용할 수 있는지를 물음으로써 문제 이해도와 활용도를 측정하고자 한다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	40	극한값을 구하기 위해 적절한 부등식을 세웠는가?	20
		극한값을 바르게 계산하였는가?	20
2	30	극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$ 를 바르게 계산하였는가?	15
		극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$ 를 바르게 계산하였는가?	15
3	30	극한값을 구하기 위해 적절한 부등식을 세웠는가?	15
		극한값을 바르게 계산하였는가?	15

3. 출제 근거

함수의 극한, p 10, 이준열 외, 고등학교 수학 II, 천재교육, 2017
정적분의 활용 (도형의 넓이), p 131, 이준열 외, 고등학교 수학 II, 천재교육, 2017
정적분과 급수, p 143, 김원경 외, 고등학교 미적분, VISANG, 2018
도함수의 활용 (평균값 정리), p 78, 이준열 외, 고등학교 수학 II, 천재교육, 2017

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자연 계열	출제 의도 및 평가 지침	2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 모의논술고사 2번 문제는 고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제로 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 특히, 수학의 개념, 원리, 법칙을 정확히 이해하고, 수학적 사고력을 바탕으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다.

문항 1은 타원의 기본적인 성질을 이해하고, 음함수의 미분법, 삼각함수의 덧셈정리 등의 도구를 적절히 활용하여 원하는 결과를 효과적으로 도출하고 있는지를 묻는 문제이다.

문항 2는 함수의 극한을 잘 이해하고, 미적분의 지식을 활용해 주어진 함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

문항 3은 속도와 가속도의 개념을 이해하고, 삼각함수의 미분법의 지식을 활용해 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	40	점 P의 좌표를 잘 구했는가?	20
		삼각형 FPQ의 넓이를 잘 구했는가?	20
2	30	다항함수 $f(x)$를 잘 구했는가?	10
		그래프의 개형을 이용하여 $g(t)$의 최솟값을 잘 구했는가?	20
3	30	$\dfrac{f(t)}{g(t)}$의 도함수를 잘 구했는가?	20
		극값을 이용하여 최댓값과 최솟값을 잘 구했는가?	10

3. 출제 근거

교과서 기하 (좋은책신사고, 고성은 외 5인) - 이차곡선 - 타원, p. 16 - 21
교과서 기하 (좋은책신사고, 고성은 외 5인) - 이차곡선 - 타원과 직선, p. 38 - 42
교과서 미적분 (미래엔, 황선욱 외 8인) - 미분법 - 삼각함수의 덧셈정리, p. 63 - 70
교과서 미적분 (미래엔, 황선욱 외 8인) - 미분법 - 음함수의 미분법 p. 94 - 97
교과서 수학II(비상교육, 김원경 외 14인) - 함수의 극한과 연속 - 함수의 극한값의 계산, p. 18 - 24
교과서 수학II(비상교육, 김원경 외 14인) - 미분 - 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, p. 78 - 85,
교과서 수학II(비상교육, 김원경 외 14인) - 미분 - 함수의 그래프, p. 86 - 89,
교과서 미적분 (좋은책신사고, 고성은 외 5인) - 미분법 - 사인함수와 코사인함수의 미분, p.70 - 71
교과서 미적분 (좋은책신사고, 고성은 외 5인) - 미분법 - 합성함수의 미분법, p.80 - 83
교과서 미적분 (좋은책신사고, 고성은 외 5인) - 미분법 - 속도와 가속도, p.112 - 114

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자연 계열 | **모 의 논 술 예 시 답 안** | 1번

1. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 의 그래프를 생각하면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad\Rightarrow\quad 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+2\left(\sqrt{n}-1\right)$$

각 변에 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 을 곱한 후에 극한 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 을 취하면,

$$2=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)}{\sqrt{n}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1+2\left(\sqrt{n}-1\right)}{\sqrt{n}}=2\text{이다.}$$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2$ 이다.

2. 첫 번째로 주어진 급수를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx=\sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)$$

따라서 제시문 (나)에 의해 구하고자 하는 극한값은 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{10}$$

동일한 방식으로 두 번째 극한값을 아래와 같이 계산 가능하다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{10}$$

3. 제시문 (다)에 의해 아래의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)\,dx=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx\ =n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx$$

여기서 $f(x)=x^5$ 이라 하자. 그러면 $f(x)$ 는 연속이고 미분가능한 함수이므로, 평균값 정리에 의해

$\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\theta_k(x))\left(\frac{k}{n}-x\right)dx$ 을 만족하는 $\theta_k(x)\in\left[x,\frac{k}{n}\right]$ 가 존재한다.

$f'(x)=5x^4$ 는 $[0,1]$ 에서 증가하므로, 모든 $x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ 에 대하여 $5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4 \le 5x^4 \le 5\left(\frac{k}{n}\right)^4$ 이 성립한다.

이로부터 아래와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

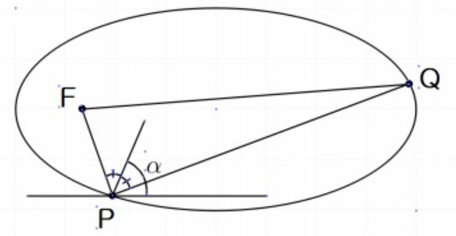
$$n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^5-x^5\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx$$

(2)번 문제에서 계산한 결과를 활용하여, 위 부등식 양쪽 끝을 $n\to\infty$ 일 때의 극한값을 계산하면 $\frac{1}{2}$ 로 동일함을 알 수 있다. 따라서 제시문 (가)에 의해 문제에서 구하고자 하는 극한값은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5-n\int_0^1 x^5dx\right]=\frac{1}{2}$ 이다.

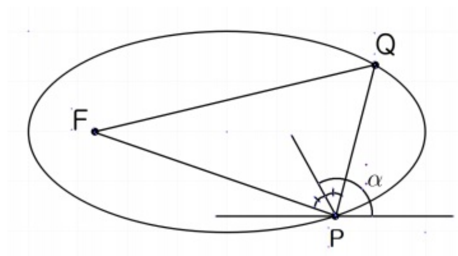
한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자연 계열 | **모 의 논 술 예 시 답 안** | 2번

1. 타원을 아래 그림과 같이 좌표평면에 두어 $x^2+4y^2=4$라 하자. 공이 초점 $\mathrm{F}(-\sqrt{3},0)$에 있고 점 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$는 x축 아래에 있다고 가정하자. 다른 초점 $\mathrm{F}'(\sqrt{3},0)$은 점 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$와 점 $\mathrm{Q}(x_1,y_1)$를 지나는 직선 위에 놓여 있다. 점 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$에서의 타원의 법선과 x축의 양의 방향이 이루는 각을 α라 하면, 이 법선의 기울기는 $\tan\alpha=\dfrac{4y_0}{x_0}$이다. 따라서



점 F, P를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{y_0-0}{x_0-(-\sqrt{3})}=\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\dfrac{4y_0}{x_0}+1}{1-\dfrac{4y_0}{x_0}}$,



점 P, Q를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{y_0-0}{x_0-\sqrt{3}}=\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\dfrac{4y_0}{x_0}-1}{1+\dfrac{4y_0}{x_0}}$ 이다.

이로부터 점 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$는 $\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 또는 $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 이고,

점 $\mathrm{Q}(x_1,y_1)$의 y좌표는 각각 $y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{21+12\sqrt{2}}$ 또는 $y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{21-12\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 삼각형 FPQ의 넓이 = 삼각형 FPF′의 넓이 + 삼각형 FQF′의 넓이 $=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot|y_0|+\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot|y_1|$

$=\dfrac{24}{17}-\dfrac{4}{17}\sqrt{2}$ 또는 $\dfrac{24}{17}+\dfrac{4}{17}\sqrt{2}$ 이다.

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3}=4$로부터 다항함수 $f(x)$는 $f(x)=4x^2+ax+b$라 할 수 있고, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{f(x)}=-\frac{1}{7}$로부터 $f(x)$는 $(x+1)$을 인수로 갖는 것을 알 수 있다. $f(x)=4(x+1)(x+c)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{f(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{4(x+c)}=\frac{1}{4(c-1)}=-\frac{1}{7}$이므로 $c=-\dfrac{3}{4}$가 되어 $f(x)=4x^2+x-3$이다. 따라서 $\displaystyle g(t)=\int_{-t}^{t}f(x)\,dx=\int_{-t}^{t}(4x^2+x-3)\,dx=\frac{8}{3}t^3-6t$이다.

$g'(t)=8t^2-6=8\left(t^2-\dfrac{3}{4}\right)$이므로 $g(t)$는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 극솟값을 갖는다.

$g(-2)=-\dfrac{28}{3}<-2\sqrt{3}=g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로, $g(t)$는 $t=-2$에서 최솟값 $g(-2)=-\dfrac{28}{3}$을 갖는다.

3. $f(t)=\sqrt{(-2\sin t)^2+(\cos t)^2}=\sqrt{1+3\sin^2 t}$, $g(t)=\sqrt{(-2\cos t)^2+(-\sin t)^2}=\sqrt{1+3\cos^2 t}$ 이다. $h(t)=\dfrac{f(t)}{g(t)}$라 하자.

$$h'(t)=\frac{\dfrac{6\sin t\cos t}{2\sqrt{1+3\sin^2 t}}\sqrt{1+3\cos^2 t}-\sqrt{1+3\sin^2 t}\,\dfrac{(-6\cos t\sin t)}{2\sqrt{1+3\cos^2 t}}}{1+3\cos^2 t}$$

$$=\frac{3\sin t\cos t\,(1+3\cos^2 t+1+3\sin^2 t)}{(1+3\cos^2 t)\sqrt{1+3\sin^2 t}\,\sqrt{1+3\cos^2 t}}=\frac{15\sin t\cos t}{(1+3\cos^2 t)\sqrt{1+3\sin^2 t}\,\sqrt{1+3\cos^2 t}}$$

$h'(t)$의 분자가 0이 되는 경우를 살펴보면, 정수 n에 대하여 $h'\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)=0$이므로 $t=\dfrac{n\pi}{2}$에서 극값을 갖는다.

정수 n에 대하여 $t=n\pi$에서 극솟값 $h(n\pi)=\dfrac{1}{2}$, $t=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값 $h\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=2$을 가지고, 실수 t에 대해서 $\dfrac{1}{2}\le h(t)\le 2$를 만족한다. 따라서 $0\le t\le 2$인 t에 대하여 $h(t)$는 최솟값 $h(0)=\dfrac{1}{2}$, 최댓값 $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$를 갖는다.

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}$$

따라서 k>1인 자연수 k에 대해. $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$

$$\therefore \frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$= \frac{1}{2}+(\sqrt{n}-1) > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} > (\sqrt{n+1}-1)$$

$$= \frac{1}{2}+\sqrt{n} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} > (\sqrt{n+1}-1)$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot(\sqrt{n+1}-1)}_{2} \le \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}_{=\,2} \le \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot(\sqrt{n}+\frac{1}{2})}_{2}$$

$$\boxed{\therefore 2}$$

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\cdot\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$$ ← 식 A라고 놓자.

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2k-1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left[n\cdot\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot n\cdot\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\cdot\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right\}\right]\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left[n\cdot\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\cdot\cancel{\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}}-\cancel{n\cdot\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\cdot\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\right]\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4-\frac{1}{n^5}\cdot(4k^3-6k^2+4k-1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4\right)-\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(4k^3-6k^2+4k-1)\right] \to 0$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4\right)\right]\right)-\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\underbrace{\left(4\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right)}_{4차식}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4\right)$$

여기. $f(x)=x^4$, $x_k=0+k\cdot\frac{1}{n}$, $\Delta x=\frac{1}{n}$, $a=0$, $b=1$로 두면. $f(x)$는 $[0,1]$에서 연속이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot\Delta x=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{5}.$$

$$\boxed{\therefore A=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$$ ← 식 B라고 하자.

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2k-1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left[n\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot n\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right\}\right]\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left[n\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\cancel{\left(\frac{k}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}-n\cdot\cancel{\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4\right]\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}$$

이는 A를 계산할 때와 같은 논리로 $\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{10}$.

$$\boxed{\therefore B=\frac{1}{10}}$$

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\cdot\int_0^1 x^5\,dx\right] \cdots 식C$$

$$f(x) = x^5 \Rightarrow C = \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^5 - x^5\right)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^5\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\cdot\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^6 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^6\right\}\right]$$

이를 정리하면. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}n\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n^6}\cdot\left(15k^4 - 20k^3 + 15k^2 - 6k + 1\right)\right]$

$$= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}15\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}\right) + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}\left(-20k^3+15k^2-6k+1\right)}}_{4차식}\right]$$

0

$$= \frac{1}{6}\cdot 15\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}$$

이때, $x_k = \frac{k}{n}$, $a=0$, $b=1$, $f(x) = x^4$ 이고, $f(x)$는 $[0,1]$에서 연속

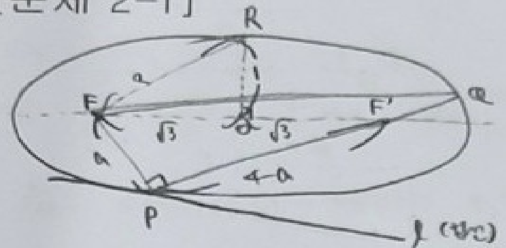
$$\Rightarrow C = \frac{1}{6}\cdot 15\int_0^1 x^4\,dx = 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\therefore \frac{1}{2}}$$

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호 성 명 페 이 지 4/6

[문제 2-1]



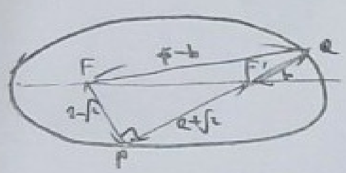
우선, 광선은 점 P에서 접선에 대해 반사되어 점 Q까지 이동하게 된다.
이때, $\overline{PQ}$ 상에 점 F'는 존재하게 된다.
타원의 중심은 O. 점 O에서 $\overline{FF'}$에 대해 수직하게 그은 직선과 타원이 만나는 점을 R이라 하면,
$\overline{FR} = 2$, $\overline{OR} = 1$이 된다. 즉, $\overline{FO} = \overline{OF'} = \sqrt{3}$.

이때, $\overline{FP} = a$ 라 하면, $\overline{PF'} = 4-a$ 이다.

$\Rightarrow$ $\triangle FPF'$에서 $a^2 + (4-a)^2 = (2\sqrt{3})^2 \rightarrow a^2 - 4a + 2 = 0$

$\therefore a = 2 \pm \sqrt{2}$.

① $a = 2-\sqrt{2}$



$\overline{F'Q} = b$ 라 하면, $\overline{FQ} = 4-b$

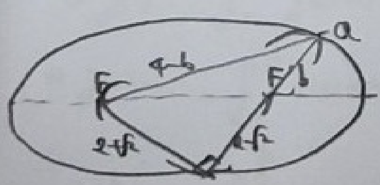
$\Rightarrow$ $\triangle FPQ$ 에서,

$(2-\sqrt{2})^2 + ((2+\sqrt{2})+b)^2 = (4-b)^2$

$\Rightarrow$ 이를 계산하면 $b = \frac{6-\sqrt{2}}{17}$.

$\therefore$ ($\triangle FPQ$ 넓이) $= \frac{1}{2} \times (2-\sqrt{2}) \times \left(2+\sqrt{2}+\frac{6-\sqrt{2}}{17}\right) = \frac{24-4\sqrt{2}}{17}$.

② $a = 2+\sqrt{2}$.



이때도 $\overline{F'Q} = b$ 라 놓고 ①과 같이 계산한다.

$(2+\sqrt{2})^2 + ((2-\sqrt{2})+b)^2 = (4-b)^2$

$\Rightarrow b = \frac{6+\sqrt{2}}{17}$.

$\therefore$ ($\triangle FPQ$ 넓이) $= \frac{1}{2} \times (2+\sqrt{2}) \times \left(2-\sqrt{2}+\frac{6+\sqrt{2}}{17}\right) = \frac{24+4\sqrt{2}}{17}$.

$\boxed{\therefore (\triangle FPQ \text{ 넓이}) = \frac{24 \pm 4\sqrt{2}}{17}}$

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호 성 명 페 이 지 5/6

[문제 2-2]

우선. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2+2x+3} = 4$ 이다. ⋯ⓐ f(x)는 이차함수이며 최고차항 계수는 4이다.

또한. $\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{f(x)} = -\frac{1}{7}$ 이다. ⋯ⓑ f(x)는 (x+1)을 인수로 가진다.

$f(x) = 4(x+1)(x-k)$ ($k\in\mathbb{R}$)라 하면. ⓑ에 대입시 $\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{4(x+1)(x-k)} = \frac{1}{4(-1-k)} = -\frac{1}{7}$

$\therefore k = \frac{3}{4}$. $\Rightarrow$ $f(x) = (x+1)(4x-3)$

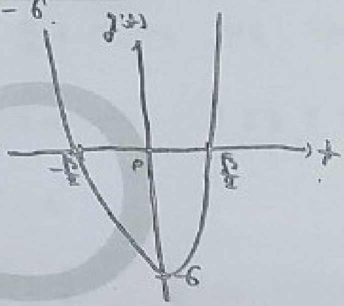
$g(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$. 이때 f(x)의 부정적분을 $F(x)+C$ 라 하자.

$\Rightarrow g(x) = F(x) - F(-x)$

$g'(x) = f(x) + f'(-x) = (x+1)(4x-3) + (1-x)(-3-4x)$

$= 8x^2 - 6$.

이때, $g'(x)$의 그래프를 그리면,



이다. 즉, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 g(x)는 극소이다.

우리는 $g(2)$, $g(-2)$, $g(\frac{\sqrt{3}}{2})$만 확인을 하면 된다. 왜냐하면, $g(0) = \int_0^0 f(x)\,dx = 0$.

① $g(2) = \int_0^2 g'(t)\,dt = \int_0^2 (8t^2-6)\,dt = \left[\frac{8}{3}t^3 - 6t\right]_0^2 = \frac{64}{3} - 12 = \frac{28}{3}$

② $g(-2) = \int_2^{-2} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = -g(2) = -\frac{28}{3}$

③ $g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} g'(t)\,dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (8t^2-6)\,dt = \left[\frac{8}{3}t^3 - 6t\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2\sqrt{3}$.

$\boxed{\therefore \text{ 최솟값은 } g(-2) = -\frac{28}{3}}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

점 P의 위치 : $(2\cos t,\ \sin t)$
〃 속도 : $(-2\sin t,\ \cos t)$] t로 미분 → 속력 $f(t) = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1+3\sin^2 t}$
〃 가속도 : $(-2\cos t,\ -\sin t)$] t로 미분 → 가속도 크기 $g(t) = \sqrt{(-2\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{1+3\cos^2 t}$

이때, $\dfrac{f(t)}{g(t)} = \sqrt{\dfrac{1+3\sin^2 t}{1+3\cos^2 t}}$

또한, $0 < \frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ 이다. 이에 유념하자. … ⓐ

$(1+3\cos^2 t) + (1+3\sin^2 t) = 2 + 3(\sin^2 t + \cos^2 t) = 5$, $1+3\cos^2 t > 0$, $1+3\sin^2 t > 0$

여기서, $1+3\cos^2 t = a$로 치환하자.

→ $\dfrac{f(t)}{g(t)} = \sqrt{\dfrac{5-a}{a}} = \sqrt{\dfrac{5}{a} - 1}$ → $\dfrac{5}{a}-1$ 의 최대, 최소를 구하면 된다.

이때, ⓐ의 범위를 살펴보면, $0 \le t \le 2$에 대해 $1 \le a \le 4$.

즉, $\dfrac{f(t)}{g(t)}$의 최댓값 $= \sqrt{\dfrac{5}{1} - 1} = \sqrt{4} = 2$

최솟값 $= \sqrt{\dfrac{5}{4} - 1} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\therefore\ \text{최댓값} = 2,\ \text{최솟값} = \frac{1}{2}}$

6

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성　　　명	페 이 지
		1/6

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성　　　명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \qquad (\because \text{제시문 (나)})$$

$$= \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2$$

1

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx = \sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left[\frac{k}{n}x-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4\,dx - 0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx = \sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left[\frac{k}{n}x-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{10}$$

2

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5\,dx = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^5 - x^5\right)dx = n\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^5 x - \frac{1}{6}x^6\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left({}_6C_2\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + {}_6C_3\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(-\frac{1}{n}\right)^3 + {}_6C_4\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(-\frac{1}{n}\right)^4 + {}_6C_5\left(\frac{k}{n}\right)^1\left(-\frac{1}{n}\right)^5 + {}_6C_6\left(\frac{k}{n}\right)^0\left(-\frac{1}{n}\right)^6\right)$$

$$\left(\because \left(\frac{k-1}{n}\right)^6 = {}_6C_0\left(\frac{k}{n}\right)^6\left(-\frac{1}{n}\right)^0 + {}_6C_1\left(\frac{k}{n}\right)^5\left(-\frac{1}{n}\right)^1 + \cdots + {}_6C_6\left(\frac{k}{n}\right)^0\left(-\frac{1}{n}\right)^6\right)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left({}_6C_2\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n} - {}_6C_3\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n^2} + {}_6C_4\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n^3} - {}_6C_5\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n^4} + {}_6C_6\cdot\frac{1}{n^5}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5\,dx\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left({}_6C_2\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n} - {}_6C_3\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n^2} + {}_6C_4\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n^3}\right.$$

$$\left. - {}_6C_5\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n^4} + {}_6C_6\frac{1}{n^5}\right) = \frac{{}_6C_2}{6}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}\right) - \frac{{}_6C_3}{6}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$

$$+ \frac{{}_6C_4}{6}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right) - \frac{{}_6C_5}{6}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\right) + \frac{{}_6C_6}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$= \frac{{}_6C_2}{6}\int_0^1 x^4\,dx - \frac{{}_6C_3}{6}\int_0^1 x^3\,dx\cdot 0 + \frac{{}_6C_4}{6}\int_0^1 x^2\,dx\cdot 0 - \frac{{}_6C_5}{6}\int_0^1 x\,dx\cdot 0$$

$$+ \frac{{}_6C_6}{6}\cdot 0 = \frac{{}_6C_2}{6}\int_0^1 x^4\,dx = \frac{{}_6C_2}{6}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{{}_6C_2}{30} = \frac{1}{2}$$

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1] 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 이라 하자. $P(x_1, y_1)$이라 하면 (단, P는 제3사분면에 있다고 하자)

접선의 기울기는 $-\frac{x_1}{4y_1}$ 가 되고 $F(-\sqrt{3}, 0)$ 이므로 직선 PF의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}$ 이다

접선과 직선 PF이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\tan\alpha=-\frac{x_1}{4y_1}$, $\tan\beta=\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}$ 이라

하면 $1=\tan\frac{\pi}{4}=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{x_1}{4y_1}-\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}}{1-\frac{x_1}{4(x_1+\sqrt{3})}}$, ($\because$ P는 제3사분면의 점이므로 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$가 된다.)

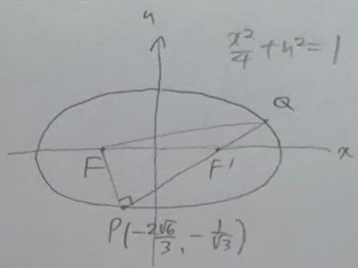
$x_1^2+4y_1^2+3x_1y_1+\sqrt{3}(x_1+4y_1)=0 \cdots ①$ 이 성립한다. $\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$ 와 ①을

연립하면 $\begin{cases} x_1^2+4y_1^2=4 \\ 9x_1^2y_1^2+16=3x_1^2+48y_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2=\frac{24}{9} & (\because x_1^2\le 4) \\ y_1^2=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ y_1=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ ($\because x_1<0,\ y_1<0$)

을 얻는다. 한편 직선 PQ는 직선 PF와 수직이므로 직선 PQ의 방정식은

$y=(3-2\sqrt{2})(x+\frac{2\sqrt{6}}{3})-\frac{1}{\sqrt{3}}=(3-2\sqrt{2})(x-\sqrt{3})$ 이다. 직선 PQ는 타원의 또 다른

초점인 $F'(\sqrt{3}, 0)$을 지나므로 점 P, F′, Q는 일직선 상에 있다.



$\overline{PF}=2-\sqrt{2}$, $\overline{PF'}=2+\sqrt{2}$ 이고

$\overline{F'Q}=k$라 하면 타원의 성질에 의해 $\overline{FQ}=4-k$ 이다

피타고라스 정리에 의해 $\overline{FQ}^2=\overline{PF}^2+(\overline{PF'}+\overline{F'Q})^2$

$\Rightarrow (4-k)^2=(2-\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2}+k)^2 \Rightarrow k=\frac{1}{17}(6-\sqrt{2})$

따라서 $\triangle FPQ$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})\left(2+\sqrt{2}+\frac{1}{17}(6-\sqrt{2})\right)=\frac{4}{17}(6-\sqrt{2})$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2] $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2+2x+3} = 4$ 이므로 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 4 이고 최고차항의 차수가 2 임을 알 수 있다. 또한 $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{f(x)} = -\frac{1}{7}$ 이므로 $f(x)$는 $x+1$ 을 인수로 갖는다. 즉, $f(x) = 4(x+1)(x+k)$

$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{f(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{4(x+1)(x+k)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{4(x+k)} = \frac{1}{4(k-1)} = -\frac{1}{7}$, $k = -\frac{3}{4}$

$f(x)$를 다시 쓰면 $f(x) = 4x^2 + x - 3$

한편 $g(t) = \int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_{-t}^{t} = \frac{8}{3}t^3 - 6t \ (-2 \le t \le 2)$

이고 $g'(t) = 8t^2 - 6$ 이고 구간 $[-2, 2]$에서 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$-\frac{28}{3}$	$\nearrow$	$2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{28}{3}$

따라서 구간 $[-2, 2]$에서 $g(t)$는 $t = -2$에서 최솟값 $-\frac{28}{3}$을 갖는다

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (-2\sin t, \cos t)$$

$$f(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1+3\sin^2 t}$$

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (-2\cos t, -\sin t)$$

$$g(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{1+3\cos^2 t}$$

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{\sqrt{1+3\sin^2 t}}{\sqrt{1+3\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{4-3\cos^2 t}{1+3\cos^2 t}}$$

$u = \cos t$ $(\cos 2 \le u \le 1)$, $p(u) = \dfrac{4-3u^2}{1+3u^2}$ 라 하자.

$p'(u) = \dfrac{-6u\cdot(1+3u^2) - (4-3u^2)\cdot 6u}{(1+3u^2)^2} = \dfrac{-30u}{(1+3u^2)^2}$ 이고 구간 $[\cos 2, 1]$에서 $p(u)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

u	$\cos 2$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$p'(u)$		$+$	0	$-$	
$p(u)$	$p(\cos 2)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{1}{4}$

이때 $p(\cos 2) = p(-\cos 2) > p(1) = \frac{1}{4}$ $(\because -1 < \cos 2 < 0,\ p(u) = p(-u))$

이므로 $p(u)$는 구간 $[\cos 2, 1]$에서 최댓값 4, 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖는다.

따라서 $\dfrac{f(t)}{g(t)}$ 는 구간 $[0, 2]$ 에서 최댓값 2, 최솟값 $\frac{1}{2}$ 를 갖는다.