

■ [공통: 수학 I·수학 II]

- 01.① 02.② 03.④ 04.② 05.③
 06.⑤ 07.④ 08.③ 09.⑤ 10.③
 11.⑤ 12.③ 13.① 14.④ 15.②
 16.6 17.15 18.3 19.2
 20.13 21.426 22.19

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & (-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}} \\ &= (-1)^4 \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 \times (2^3)^{-\frac{2}{3}} \\ &= 1 \times 2^{\frac{1}{2} \times 4} \times 2^{3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} \\ &= 2^2 \times 2^{-2} \\ &= 2^{2+(-2)} \\ &= 2^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

정답 ①

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^3 + 9 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= f'(2) \\ &= 3 \times 2^2 = 12 \end{aligned}$$

정답 ②

3. 출제의도 : 삼각함수의 정의를 이해하고, 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos^2 \theta = \frac{4}{9} \text{이고}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{일 때 } \cos \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = -\frac{2}{3}$$

한편, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$= 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

따라서

$$\sin^2 \theta + \cos \theta = \frac{5}{9} + \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{9}$$

정답 ④

4. 출제의도 : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$x \rightarrow 0^- \text{일 때 } f(x) \rightarrow -2 \text{이고,}$$

$$x \rightarrow 1^+ \text{일 때 } f(x) \rightarrow 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$= (-2) + 1 = -1$$

정답 ②

5. 출제의도 : 등비수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 공비를 $r(r > 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 &= a_1 r + a_1 r^2 \\ &= \frac{1}{4}r + \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$r^2 + r - 6 = 0, (r+3)(r-2) = 0$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = 2$$

따라서

$$\begin{aligned} a_6 + a_7 &= a_1 r^5 + a_1 r^6 \\ &= \frac{1}{4} \times 2^5 + \frac{1}{4} \times 2^6 \\ &= 24 \end{aligned}$$

정답 ③

6. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이해하고 이를 이용하여 미정계수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = -1$, $x = 3$ 에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1^+} |f(x)| = |f(-1)|$$

이어야 한다. 이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow -1^-} |x+a| \\ &= |-1+a|, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1^+} |x| = 1,$$

$$|f(-1)| = |-1| = 1$$

이므로

$$|-1+a| = 1$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 2$$

(ii) 함수 $|f(x)|$ 가 $x = 3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3^+} |f(x)| = |f(3)|$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3^-} |x| = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3^+} |bx-2|$$

$$= |3b-2|,$$

$$|f(3)| = |3b-2|$$

이므로

$$|3b-2| = 3$$

$$b > 0 \text{이므로 } b = \frac{5}{3}$$

(i), (ii)에 의하여

$$a+b = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

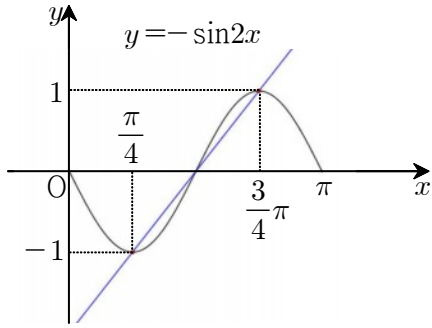
정답 ⑤

7. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이해하여 곡선 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x) = -\sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이

므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 일 때 최솟값

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

을 갖고, $x = \frac{3}{4}\pi$ 일 때 최댓값

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\frac{3}{2}\pi = 1$$

을 갖는다.

따라서 $a = \frac{3\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{4}$ 이므로 두 점

$\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right), \left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$ 을 지나는 직선의

기울기는

$$\frac{1 - (-1)}{\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

정답 ④

8. 출제의도 : 평균값의 정리를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = f'(c) \dots \textcircled{A}$$

를 만족하는 상수 c 가 열린구간 $(1, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때, 조건 (나)에 의하여

$$f'(c) \geq 5$$

이므로 \textcircled{A} 에서

$$\frac{f(5) - 3}{4} \geq 5$$

$$f(5) \geq 23$$

따라서 $f(5)$ 의 최솟값은 23이다.

정답 ③

9. 출제의도 : 도함수를 활용하여 함수의 최솟값을 구하고 이를 부등식에 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^3 - x^2 - x + 6 - a$$

이때 $x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면 $x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3x^2 - 2x - 1 \\ &= (3x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

이므로

$$h'(x) = 0$$

에서

$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{또는} \quad x = 1$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$	$6 - a$	\searrow	$5 - a$	\nearrow

즉, $x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $5 - a$ 이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5 - a \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 $a \leq 5$ 이므로 구하는 실수 a 의 최댓값은 5이다.

정답 ⑤

10. 출제의도 : 코사인법칙을 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BAC = \theta$, $\overline{AC} = a$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\theta$$

즉,

$$2^2 = 3^2 + a^2 - 2 \times 3 \times a \times \frac{7}{8}$$

$$a^2 - \frac{21}{4}a + 5 = 0,$$

$$4a^2 - 21a + 20 = 0$$

$$(4a - 5)(a - 4) = 0$$

따라서 조건에서 $a > 3$ 이므로 $a = 4$

$$\overline{AM} = \overline{CM} = \frac{a}{2} = 2$$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AM} \times \cos\theta$$

$$= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{7}{8}$$

$$= \frac{5}{2}$$

이므로

$$\overline{MB} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{MA} \times \overline{MC} = \overline{MB} \times \overline{MD}$$

에서

$$2 \times 2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \times \overline{MD}$$

따라서

$$\overline{MD} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

정답 ③

11. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 위치를 $x_1(t)$ 라 하면

$$x_1(t) = \int_0^t (2-t) dt$$

$$= \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^t$$

$$= 2t - \frac{1}{2}t^2$$

따라서, 출발 후 점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각은

$$2t - \frac{1}{2}t^2 = 0, \quad t^2 - 4t = 0$$

$$t(t-4) = 0$$

$$t = 4$$

이므로

출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |3t| dt = \int_0^4 3t dt$$

$$= \left[\frac{3}{2}t^2 \right]_0^4$$

$$= 24$$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 양수이고 조건 (가)에서

$$a_5 \times a_7 < 0$$

이므로

$$a_5 < 0, a_7 > 0$$

즉, $n \leq 5$ 일 때 $a_n < 0$ 이고, $n \geq 7$ 일 때 $a_n > 0$ 이다.

이때 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^6 |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^6 |a_{2k}|$$

이므로

$$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}| \\ = 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$$

$$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 3이므로

$$(a_1 + 18) + (a_1 + 24) + (a_1 + 30) \\ = 6 - (a_1 + 3) - (a_1 + 9) + |a_1 + 15|$$

$$|a_1 + 15| = 5a_1 + 78 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

⑦에서 $a_1 + 15 \geq 0$ 이면

$$a_1 + 15 = 5a_1 + 78$$

$$4a_1 = -63$$

$$a_1 = -\frac{63}{4} < -15$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 + 15 < 0$ 이므로 ⑦에서

$$-a_1 - 15 = 5a_1 + 78$$

$$6a_1 = -93$$

$$a_1 = -\frac{31}{2}$$

따라서

$$a_{10} = a_1 + 9 \times 3 \\ = -\frac{31}{2} + 27 \\ = \frac{23}{2}$$

정답 ③

13. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 구하고 이를 이용하여 간단한 지수방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

점 A의 x 좌표는 64이고 점 Q_1 의 x 좌표는 x_1 이다.

이때 두 점 A와 P_1 의 y 좌표가 같으므로

$$2^{64} = 16^{x_1} \text{에서}$$

$$2^{64} = 2^{4x_1}$$

$$4x_1 = 64 \text{에서}$$

$$x_1 = 16$$

같은 방법으로 모든 자연수 n 에 대하여 두 점 P_n, Q_n 의 x 좌표는 x_n 으로 서로 같고, 두 점 Q_n, P_{n+1} 의 y 좌표는 같으므로

$$2^{x_n} = 16^{x_{n+1}}$$

즉,

$$2^{x_n} = 2^{4x_{n+1}}$$

이므로

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 첫째항이 16, 공비가

$\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{-2n+2} = 2^{6-2n}$$

한편,

$x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이

므로

$$x_5 \geq \frac{1}{k} \text{이고 } x_6 < \frac{1}{k}$$

어어야 한다.

$$x_5 \geq \frac{1}{k} \text{에서 } 2^{-4} \geq \frac{1}{k},$$

$$\text{즉 } \frac{1}{16} \geq \frac{1}{k} \text{에서 } k \geq 16 \cdots \textcircled{7}$$

$$x_6 < \frac{1}{k} \text{에서 } 2^{-6} < \frac{1}{k},$$

$$\text{즉 } \frac{1}{64} < \frac{1}{k} \text{에서 } k < 64 \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서 $16 \leq k < 64$ 이므로 자연수 k 의 개수는 $64 - 16 = 48$ 이다.

정답 ①

14. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\text{ㄱ. } x < 0 \text{일 때 } g'(x) = -f(x)$$

$$x > 0 \text{일 때 } g'(x) = f(x)$$

그런데, 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하고 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \{-f(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$-f(0) = f(0), \quad 2f(0) = 0$$

$$f(0) = 0 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0 \text{이고 함수 } g(x)$$

는 삼차함수이므로

$$g(x) = x^2(x-a) \text{ (단, } a \text{는 상수)}$$

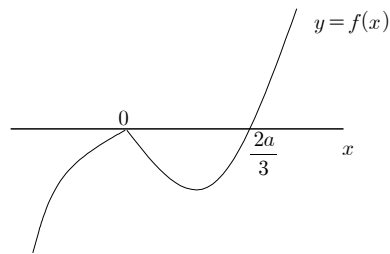
로 놓으면

$$g'(x) = 2x(x-a) + x^2 \\ = x(3x-2a)$$

(i) $a > 0$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} -x(3x-2a) & (x < 0) \\ x(3x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

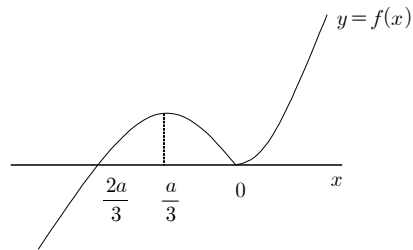
이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.



(ii) $a < 0$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} -x(3x-2a) & (x < 0) \\ x(3x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

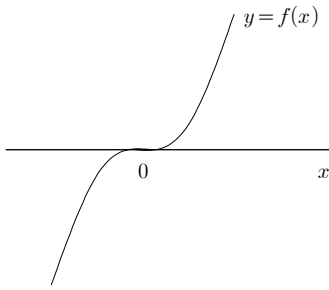
이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고 $x = \frac{a}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.



(iii) $a=0$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 & (x < 0) \\ 3x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다.



(거짓)

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

$f(1) = 3 - 2a$ 이므로 $2 < 3 - 2a < 4$ 에서

$$0 < a < \frac{1}{2}$$

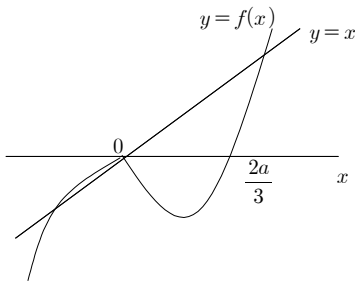
또한, $x < 0$ 일 때

$$f'(x) = -(3x - 2a) - 3x = -6x + 2a$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2a$$

이때 $0 < 2a < 1$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2 < f(1) < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) = x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ii) ㄴ. (ii)의 경우

$f(1) = 3 - 2a$ 이므로 $2 < 3 - 2a < 4$ 에서

$$-\frac{1}{2} < a < 0$$

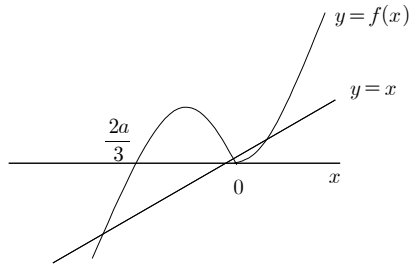
또한, $x > 0$ 일 때

$$f'(x) = (3x - 2a) + 3x = 6x - 2a$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2a$$

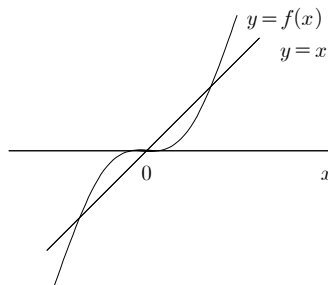
이때 $0 < -2a < 1$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2 < f(1) < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) = x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(iii) ㄴ. (iii)의 경우

$f(1) = 3$ 이고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2 < f(1) < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) = x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ④

<다른풀이>

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

$$0 < a < \frac{1}{2} \text{ 이고}$$

$$\textcircled{1} \ x < 0 \text{ 일 때, } -x(3x - 2a) = x$$

$$-3x + 2a = 1, \ x = \frac{2a - 1}{3}$$

② $x \geq 0$ 일 때, $x(3x-2a) = x$

$$x(3x-2a-1) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2a+1}{3}$$

따라서 $2 < f(1) < 4$ 일 때,

방정식 $f(x) = x$ 은 서로 다른 실근

$$\frac{2a-1}{3}, 0, \frac{2a+1}{3} \text{을 갖는다.}$$

15. 출제의도 : 귀납적으로 주어진 수열의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a_1 = 0 \text{이므로}$$

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

$$a_2 > 0 \text{이므로}$$

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$$

$$a_3 < 0 \text{이므로}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k(k+1)}$$

$$\text{이때 } k=1 \text{이면 } a_4 = 0 \text{이므로 } n = 3m - 2$$

(m 은 자연수)일 때 $a_n = 0$ 이다. 즉,

$$a_{22} = 0 \text{이므로 } k=1 \text{은 조건을 만족시킨다.}$$

다.

한편 $k > 1$ 이면 $a_4 > 0$ 이므로

$$a_5 = a_4 - \frac{1}{k} = \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

$$a_5 < 0 \text{이므로}$$

$$a_6 = a_5 + \frac{1}{k+1} = \frac{3}{k+1} - \frac{2}{k} = \frac{k-2}{k(k+1)}$$

$$\text{이때 } k=2 \text{이면 } a_6 = 0 \text{이므로 } n = 5m - 4$$

(m 은 자연수)일 때 $a_n = 0$ 이다. 즉,

$$a_{22} \neq 0 \text{이므로 } k=2 \text{는 조건을 만족시키$$

지 않는다.

한편 $k > 2$ 이면 $a_6 > 0$ 이므로

$$a_7 = a_6 - \frac{1}{k} = \frac{3}{k+1} - \frac{3}{k}$$

$$a_7 < 0 \text{이므로}$$

$$a_8 = \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k(k+1)}$$

마찬가지 방법으로 계속하면

$$k=3 \text{이면 } a_8 = 0 \text{이고 이때 } a_{22} = 0 \text{이다.}$$

$$k=4 \text{이면 } a_{10} = 0 \text{이고 이때 } a_{22} \neq 0 \text{이다.}$$

$$5 \leq k \leq 9 \text{이면 } a_{22} \neq 0 \text{이다.}$$

$$k=10 \text{이면 } a_{22} = 0 \text{이다.}$$

$$k \geq 11 \text{이면 } a_{22} \neq 0 \text{이다.}$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 k 의 값은

$$1, 3, 10$$

이므로 구하는 모든 k 의 값의 합은

$$1 + 3 + 10 = 14$$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수조건에서

$$x+2 > 0 \text{이고 } x-2 > 0$$

이어야 하므로

$$x > 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x+2) + \log_2(x-2)$$

$$= \log_2(x+2)(x-2)$$

$$= \log_2(x^2 - 4)$$

$$= 5$$

에서

$$x^2 - 4 = 2^5$$

$$x^2 = 36 \cdots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서

$$x = 6$$

정답 6

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (8x^3 + 6x^2) dx \\ &= 2x^4 + 2x^3 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이므로

$$f(0) = C = -1$$

따라서

$$f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 1$$

그러므로

$$f(-2) = 32 - 16 - 1 = 15$$

정답 15

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (4k + a) &= 4 \sum_{k=1}^{10} k + 10a \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10a \\ &= 220 + 10a \end{aligned}$$

즉, $220 + 10a = 250$ 이므로

$$10a = 30$$

따라서

$$a = 3$$

정답 3

19. 출제의도 : 사차함수의 극대, 극소를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^4 + ax^2 + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이므로

$$f'(1) = 4 + 2a = 0$$

에서

$$a = -2$$

그러므로

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 4를 가지므로

$$f(0) = b = 4$$

따라서 $a+b = (-2)+4 = 2$

정답 2

20. 출제의도 : 정적분으로 나타낸 함수를 이해하고 극소값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이면

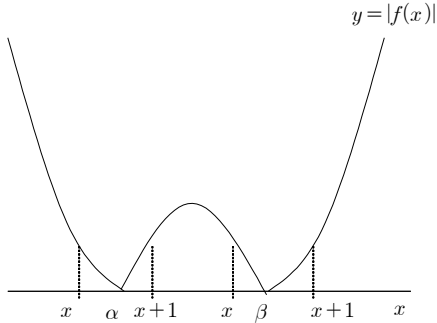
$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x+1} |f(t)| dt \\ &= \int_x^{x+1} f(t) dt \end{aligned}$$

이므로 $g(x)$ 는 이차함수이고 이때 $g(x)$ 가 극소인 x 의 값은 1개뿐이다.

따라서 조건을 만족시키지 못한다.

$f(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)$ ($\alpha < \beta$)라 하면
함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같고

$x=1, x=4$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극소이므로 $g'(1)=0, g'(4)=0$ 이다.



(i) $x < \alpha < x+1$ 일 때

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_x^{x+1} |f(t)| dt \\
 &= \int_x^\alpha f(t) dt + \int_\alpha^{x+1} \{-f(t)\} dt \\
 &= -\int_\alpha^x f(t) dt - \int_\alpha^{x+1} f(t) dt \\
 &= -\int_\alpha^x 2(t-\alpha)(t-\beta) dt \\
 &\quad - \int_\alpha^{x+1} 2(t-\alpha)(t-\beta) dt \\
 &= -\int_\alpha^x 2(t-\alpha)(t-\beta) dt \\
 &\quad - \int_{\alpha-1}^x 2(t+1-\alpha)(t+1-\beta) dt
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= -2(x-\alpha)(x-\beta) \\
 &\quad -2(x+1-\alpha)(x+1-\beta) \\
 g'(1) &= -2(1-\alpha)(1-\beta) - 2(2-\alpha)(2-\beta) \\
 &= 6\alpha + 6\beta - 4\alpha\beta - 10 = 0
 \end{aligned}$$

$$3\alpha + 3\beta - 2\alpha\beta - 5 = 0 \dots \ominus$$

(ii) $x < \beta < x+1$ 일 때

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_x^{x+1} |f(t)| dt \\
 &= \int_x^\beta \{-f(t)\} dt + \int_\beta^{x+1} f(t) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_\beta^x f(t) dt + \int_\beta^{x+1} f(t) dt \\
 &= \int_\beta^x 2(t-\alpha)(t-\beta) dt \\
 &\quad + \int_\beta^{x+1} 2(t-\alpha)(t-\beta) dt \\
 &= \int_\beta^x 2(t-\alpha)(t-\beta) dt \\
 &\quad + \int_{\beta-1}^x 2(t+1-\alpha)(t+1-\beta) dt
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2(x-\alpha)(x-\beta) \\
 &\quad + 2(x+1-\alpha)(x+1-\beta) \\
 g'(4) &= 2(4-\alpha)(4-\beta) + 2(5-\alpha)(5-\beta) \\
 &= 82 - 18\alpha - 18\beta + 4\alpha\beta = 0 \\
 9\alpha + 9\beta - 2\alpha\beta - 41 &= 0 \dots \ominus
 \end{aligned}$$

⊖, ⊖에서

$$\alpha\beta = \frac{13}{2}$$

이므로

$$f(0) = 2\alpha\beta = 2 \times \frac{13}{2} = 13$$

정답 13

21. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 모든 자연수를 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

$$4 \log_{64} \left(\frac{3}{4n+16} \right) = \log_8 \left(\frac{3}{4n+16} \right)^2$$

이므로 이 값이 정수가 되려면

$$\left(\frac{3}{4n+16} \right)^2 = 8^m \quad (m \text{은 정수}) \dots \ominus$$

의 꼴이 되어야 한다.

그러려면 우선 $4n+16$ 이 3의 배수가 되어야 하므로

$n = 3k - 1$ (k 는 $1 \leq k \leq 333$ 인 자연수)

이어야 한다. 이때 ㉠에서

$$\left(\frac{1}{4k+4}\right)^2 = 2^{3m}$$

$$16(k+1)^2 = 2^{-3m}$$

$$(k+1)^2 = 2^{-3m-4}$$

이어야 하므로

$$(k+1)^2 = 2^2, 2^8, 2^{14}$$

$$k+1 = 2, 2^4, 2^7$$

$$k = 1 \text{ 또는 } k = 15 \text{ 또는 } k = 127$$

즉, $n = 2$ 또는 $n = 44$ 또는 $n = 380$ 이므로 조건을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은

$$2 + 44 + 380 = 426$$

정답 426

22. 출제의도 : 연속함수의 성질을 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

함수

$$g(x) = \begin{cases} (x+3)f(x) & (x < 0) \\ (x+a)f(x-b) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \quad \cdots \text{㉠}$$

이 성립한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+3)f(x) = 3f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+a)f(x-b) = af(-b),$$

$$g(0) = af(-b)$$

이므로 ㉠에서

$$3f(0) = af(-b) \quad \cdots \text{㉡}$$

한편,

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|g(x)|}{(x+3)^2(\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2(\sqrt{0 + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2 \times 2|g(t)|}$$

$\cdots \text{㉢}$

이때 $t \neq -3$ 이고 $t \neq 6$ 인 모든 실수 t 에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$$f(x) = (x+3)(x+k) \quad (k \text{는 상수})$$

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2 \times 2|g(t)|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2 \times 2|g(t)|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x+k|}{2|g(t)|} \quad \cdots \text{㉣}$$

이때 $t = -3$ 과 $t = 6$ 에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x) = 0$ 이 모든 실근은 $x = -3$ 과 $x = 6$ 뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3) = 0$ 이므로

$$g(6) = 0, \text{ 즉 } (6+a)f(6-b) = 0$$

이어야 한다.

이때 $a > 0$ 이므로

$$f(6-b) = 0 \text{에서}$$

$$6-b = -3 \text{ 또는 } 6-b = -k$$

$$\text{따라서 } b = 9 \text{ 또는 } k-b = -6$$

(i) $b = 9$ 인 경우

$x < 0$ 에서

$$g(x) = (x+3)f(x) = (x+3)^2(x+k)$$

이때

$x < 0$ 에서 $g(x) = 0$ 의 해는 -3 뿐이므로

$$-k \geq 0 \text{ 또는 } k = 3 \quad \cdots \text{㉤}$$

$x \geq 0$ 에서

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+a)f(x-9) \\ &= (x+a)(x-6)(x-9+k) \end{aligned}$$

이때 $x \geq 0$ 에서 $g(x) = 0$ 의 해는 6뿐이므로

$$9-k < 0 \text{ 또는 } 9-k=6 \cdots \textcircled{\ominus}$$

$\textcircled{\ominus}$, $\textcircled{\ominus}$ 에서

$$k=3$$

따라서 $f(x) = (x+3)^2$ 이므로 $\textcircled{\ominus}$ 에서

$$3 \times 3^2 = af(-9), \quad 27 = 36a$$

$$a = \frac{3}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned} g(4) &= (4+a)f(4-b) \\ &= \left(4 + \frac{3}{4}\right)f(-5) \\ &= \frac{19}{4} \times (-2)^2 = 19 \end{aligned}$$

(ii) $k-b = -6$ 인 경우

$x < 0$ 에서

$$g(x) = (x+3)f(x) = (x+3)^2(x+k)$$

이때 $x < 0$ 에서 $g(x) = 0$ 의 해는 -3 뿐이므로

$$-k \geq 0 \text{ 또는 } k=3$$

$x \geq 0$ 에서

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+a)f(x-b) \\ &= (x+a)(x-b+3)(x-b+k) \\ &= (x+a)(x-b+3)(x-6) \end{aligned}$$

이때 $x \geq 0$ 에서 $g(x) = 0$ 의 해는 6뿐이고, $b > 3$ 이므로

$$b-3=6 \text{에서}$$

$$b=9$$

$$k-b = -6 \text{에서}$$

$$k=3$$

따라서 (i)과 같은 결과이므로

$$g(4) = 19 \text{이다.}$$

■ [선택: 확률과 통계]

23. ② 24. ① 25. ④ 26. ②
27. ③ 28. ④ 29. 115 30. 9

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

5개의 문자 중 a 의 개수가 3이므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

정답 ②

24. 출제의도 : 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀있는 수를 a , 주머니 B에서 꺼낸 카드에 적혀있는 수를 b 라 하면

모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$3 \times 5 = 15$$

이때 $|a-b|=1$ 인 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4)$ 이고,

그 개수는 5이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

정답 ①

25. 출제의도 : 독립시행의 확률과 여사건의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

6의 약수가 아닐 확률은

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상이라면 4번의 시행 중 주사위의 눈의 수가 6의 약수인 경우가 2번 이상이면 된다.

주사위의 눈의 수가 6의 약수인 경우가 0번일 확률은

$${}_4C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

주사위의 눈의 수가 6의 약수인 경우가 1번일 확률은

$${}_4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - \left(\frac{1}{81} + \frac{8}{81}\right) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

정답 ④

26. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)^4 &= (x^4 + 2x^2 + 1)^2 \\ &= x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1 \end{aligned}$$

또 $(x^3 + 1)^n$ 의 일반항은

$${}_nC_r (x^3)^r = {}_nC_r x^{3r}$$

(단, $r=0, 1, 2, \dots, n$)

이때 x^5 의 계수는

$r=1$ 일 때

$$4x^2 \times {}_n C_1 x^3 = 4nx^5 \text{에서}$$

$4n$ 이므로

$$4n = 12 \text{에서}$$

$$n = 3$$

따라서 x^6 의 계수는

$r=0$ 일 때

$$4x^6 \times {}_3 C_0 = 4x^6 \text{에서 } 4$$

$r=2$ 일 때

$$1 \times {}_3 C_2 x^6 = 3x^6 \text{에서 } 3$$

즉, x^6 의 계수는

$$4+3=7$$

정답 ②

27. 출제의도 : 중복순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 양 끝에 나열되는 문자는 X, Y 중에서 중복을 허락하여 정하면 되므로

양 끝에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는

$${}_2 \Pi_2 = 2^2 = 4$$

조건 (나)에서 문자 a 의 위치를 정하는 경우의 수는

$$4$$

나머지 3곳에 나열할 문자는 b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 정하면 되므로

나머지 3곳에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는

$${}_3 \Pi_3 = 3^3 = 27$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 4 \times 27 = 432$$

정답 ③

28. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

만들 수 있는 모든 네 자리 자연수의 개수는

$${}_5 P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$$

$$= 120$$

5의 배수인 네 자리 자연수는

일의 자릿수가 5이어야 하므로

5의 배수인 네 자리 자연수의 개수는

$${}_4 P_3 = 4 \times 3 \times 2$$

$$= 24$$

즉, 택한 수가 5의 배수일 확률은

$$\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

또 천의 자릿수가 3이고 3500 이상인 네 자리 자연수의 개수는

$${}_3 P_2 = 3 \times 2$$

$$= 6$$

천의 자릿수가 4인 네 자리 자연수의 개수는

$${}_4 P_3 = 4 \times 3 \times 2$$

$$= 24$$

천의 자릿수가 5인 네 자리 자연수의 개수는

$${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2$$

$$= 24$$

이므로 3500 이상인 네 자리 자연수의 개수는

$$6 + 24 + 24 = 54$$

즉, 택한 수가 3500 이상일 확률은

$$\frac{54}{120} = \frac{9}{20}$$

이때 5의 배수이고 3500 이상인 네 자리 자연수는 천의 자릿수가 4이고 일의 자릿수가 5인 경우이므로 그 개수는

$${}_3P_2 = 3 \times 2$$

$$= 6$$

즉, 택한 수가 5의 배수이고 3500 이상일 확률은

$$\frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{5} + \frac{9}{20} - \frac{1}{20} = \frac{3}{5}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(1)=1$ 이면 조건 (가)에서 $f(1)=4$ 이므로 모순이다.

(i) $f(1)=2$ 인 경우

조건 (가)에서 $f(2)=4$

$f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

$f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 5

이 경우 함수 f 의 개수는

$$10 \times 5 = 50$$

(ii) $f(1)=3$ 인 경우

조건 (가)에서 $f(3)=4$

$f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2

$f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$5 \times 5 = 25$$

이 경우 함수 f 의 개수는

$$2 \times 25 = 50$$

(iii) $f(1)=4$ 인 경우

조건 (가)에서 $f(4)=4$

$f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$$

$f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 5

이 경우 함수 f 의 개수는

$$3 \times 5 = 15$$

(iv) $f(1)=5$ 인 경우

조건 (가)에서 $f(5)=4$

이 경우는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f 의 개수는 $50 + 50 + 15 = 115$

정답 115

30. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$b-a \geq 5$ 인 사건을 E , $c-a \geq 10$ 인 사건을 F 라 하면 구하는 확률은

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \text{이다.}$$

모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_{12}C_3 = 220$$

이때 $b-a \geq 5$ 를 만족시키는 순서쌍

(a, b) 는

$(1, 6), (1, 7), (1, 8), \dots, (1, 11)$

$(2, 7), (2, 8), \dots, (2, 11)$

\vdots

$(6, 11)$

$a=1$ 일 때 c 의 개수는

$$6+5+4+3+2+1=21$$

$a=2$ 일 때 c 의 개수는

$$5+4+3+2+1=15$$

$a=3$ 일 때 c 의 개수는

$$4+3+2+1=10$$

$a=4$ 일 때 c 의 개수는

$$3+2+1=6$$

$a=5$ 일 때 c 의 개수는

$$2+1=3$$

$a=6$ 일 때 c 의 개수는

$$1$$

이므로 $b-a \geq 5$ 를 만족시키는 모든 순

서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$21+15+10+6+3+1$$

$$=56$$

$$\text{즉, } P(E) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$

한편, $b-a \geq 5$ 이고 $c-a \geq 10$ 인 경우는

$a=1, c=11$ 일 때

$b=6, 7, 8, 9, 10$

$a=1, c=12$ 일 때

$b=6, 7, 8, 9, 10, 11$

$a=2, c=12$ 일 때

$b=7, 8, 9, 10, 11$

이므로 $b-a \geq 5$ 이고 $c-a \geq 10$ 인 모든

순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$5+6+5=16$$

$$\text{즉, } P(E \cap F) = \frac{16}{220} = \frac{4}{55}$$

따라서

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

$$= \frac{\frac{4}{55}}{\frac{14}{55}}$$

$$= \frac{2}{7}$$

즉, $p=7, q=2$ 이므로

$$p+q=7+2=9$$

정답 9

■ [선택: 미적분]

23. ① 24. ① 25. ② 26. ②
 27. ③ 28. ⑤ 29. 50 30. 16

23. 출제의도 : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 식의 분자와 분모에

$$\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}$$

을 각각 곱하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}}{(n^2+3n) - (n^2+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2} \\ &= \frac{1+1}{2} = 1 \end{aligned}$$

정답 ①

24. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$x^2 - y \ln x + x = e$$

의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - \frac{dy}{dx} \times \ln x - y \times \frac{1}{x} + 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - \frac{y}{x} + 1}{\ln x}$$

그러므로 점 (e, e^2) 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2e - \frac{e^2}{e} + 1}{\ln e} = e + 1$$

정답 ①

25. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x) = x^3 + 2x + 3$ 의 역함수이므로

$$x = y^3 + 2y + 3 \quad \text{---} \textcircled{1}$$

$x = 3$ 일 때,

$$3 = y^3 + 2y + 3$$

$$y(y^2 + 2) = 0$$

$$y = 0$$

또, $\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$1 = (3y^2 + 2) \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2 + 2}$$

따라서,

$$g'(3) = \frac{1}{3 \times 0^2 + 2} = \frac{1}{2}$$

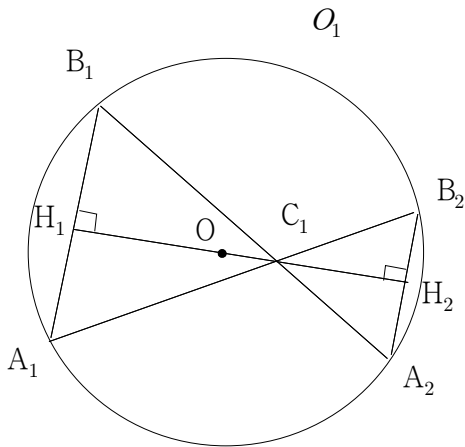
정답 ②

26. 출제의도 : 도형에 활용된 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

원 O_1 의 중심을 O 라 하고 점 O 에서 두 선분 A_1B_1 , A_2B_2 에 내린 수선의 발을 각각 H_1 , H_2 라 하면 점 H_1 은 선분 A_1B_1 의 중점이고 점 H_2 는 선분 A_2B_2 의 중점이다.

또, $\overline{A_1B_1} // \overline{A_2B_2}$ 이므로 세 점 H_1, O, H_2 는 한 직선 위에 있다.



이때, $\angle A_1B_1A_2 = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{B_1C_1} &= \overline{B_1H_1} \times \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \\ &= 1 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

그러므로 삼각형 $A_1C_1B_1$ 은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

또,

$$\angle A_1B_2A_2 = \angle A_1B_1A_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle A_2C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1 = \frac{\pi}{3}$$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$ 는 정삼각형이다.

이때,

$$\overline{C_1A_2} = \overline{B_1A_2} - \overline{B_1C_1} = 3 - 2 = 1$$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$ 는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

그러므로

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \times (\triangle A_1A_2B_1 - \triangle A_1C_1B_1) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

또, 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$ 에서

$$\overline{A_1A_2} // \overline{A_2A_3}, \overline{A_1B_1} // \overline{A_2B_2},$$

$$\overline{A_2B_1} // \overline{A_3B_2}$$

이고

$$\overline{A_1B_1} = 2, \overline{A_2B_2} = 1$$

이므로 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$ 의 넓음비는 2:1이다.

따라서, 넓이의 비는 4:1이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{S_1}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 급수의 수렴조건을 이해하고 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 4이므로 공차를 d 라 하면

$$a_n = 4 + (n-1)d$$

이때, 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right)$$

이 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4+(n-1)d}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d + \frac{4-d}{n}}{1} - \frac{3 + \frac{7}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right) \\ &= d - 3 = 0 \end{aligned}$$

그러므로

$$d = 3$$

이때, $a_n = 3n + 1$ 이므로 주어진 급수에
대입하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(3 + \frac{1}{n} \right) - \left(3 + \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

정답 ③

28. 출제의도 : 미분과 주어진 조건을
이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구
할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 는 최고차항이 양수인 삼차함
수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축
은 적어도 한 점에서 만난다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 $x \neq 1$ 인 모든
실수 x 에서 연속이므로

$$\begin{cases} x=1 \text{ 일 때, } f(1)=0 \\ x \neq 1 \text{ 일 때, } f(x) \neq 0 \end{cases} \quad \text{---}\text{㉑}$$

한편,

$$g(x) = \begin{cases} \ln |f(x)| & (f(x) \neq 0) \\ 1 & (f(x) = 0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f(x) \neq 0)$$

이때, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 가 $x=2$
에서 극값을 가지고 ㉑을 만족해야 하므
로

$$f'(2) = 0 \quad \text{----}\text{㉒}$$

한편, 조건 (다)에서 주어진 방정식

$$g(x) = 0$$

은

$$\ln |f(x)| = 0$$

$$|f(x)| = 1$$

$$f(x) = -1 \text{ 또는 } f(x) = 1$$

이때, 이 방정식이 서로 다른 세 실근을
갖고 ㉒을 만족하려면 함수 $y=f(x)$ 는
극값을 가져야 한다.

한편, ㉒으로부터 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에
서 극값을 가지므로

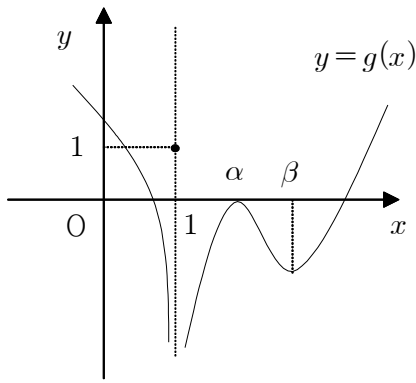
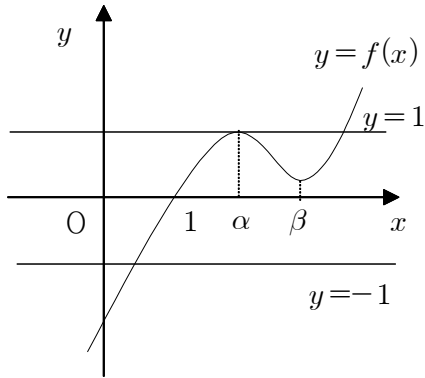
$$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0 \quad (1 < \alpha < \beta)$$

로 놓을 수 있다.

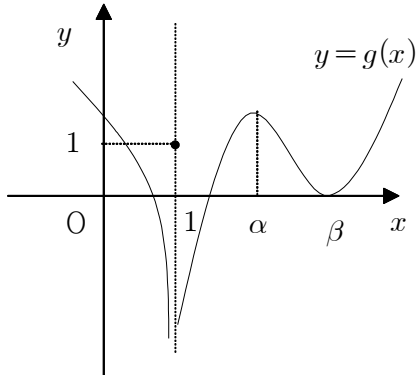
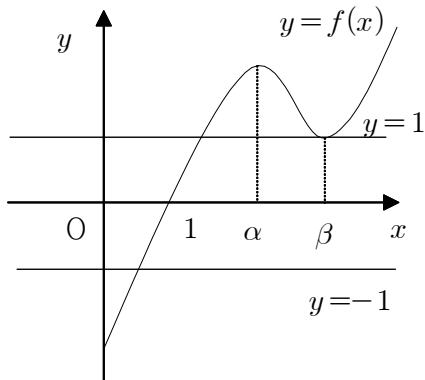
이때, $\alpha=2$ 이거나 $\beta=2$ 이다.

이때, 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f(x)$
의 그래프와 $g(x)$ 의 그래프의 개형은 다
음과 같다.

(i)



(ii)



이때, 조건 (나)로부터 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극대이고 $|g(x)|$ 가 $x=2$ 에서 극소이기 위해서는 그림 (i)과 같아야 하고

$$\alpha = 2$$

이때, 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(x) - 1 = \frac{1}{2}(x-2)^2(x-k) \quad (k \text{는 상수})$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2(x-k) + 1$$

이고 \ominus 에서 $f(1) = 0$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{2}(1-k) + 1 = 0$$

$$1 - k = -2$$

$$k = 3$$

이때,

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2(x-3) + 1$$

이므로

$$f'(x) = (x-2)(x-3) + \frac{1}{2}(x-2)^2$$

$$= \frac{1}{2}(x-2)\{(2x-6) + (x-2)\}$$

$$= \frac{1}{2}(x-2)(3x-8)$$

이때, $f'(x) = 0$ 에서

$$x = 2 \quad \text{또는} \quad x = \frac{8}{3}$$

$$\text{그러므로 } \beta = \frac{8}{3}$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{8}{3}$ 에서 극솟값

을 갖고 그 값은

$$\ln \left| f\left(\frac{8}{3}\right) \right| = \ln \left| \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \right|$$

$$= \ln \frac{25}{27}$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 도형에 활용된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 AHP에서 $\angle APH = \theta$ 이므로

$$\angle HAP = \frac{\pi}{2} - \theta$$

한편, 삼각형 OPA는

$$\overline{OP} = \overline{OA} = 1$$

인 이등변삼각형이므로

$$\angle AOP = \pi - 2 \times \angle HAP$$

$$= \pi - 2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$= 2\theta$$

그러므로

$$\overline{AH} = 1 - \overline{OH}$$

$$= 1 - \overline{OP} \cos 2\theta$$

$$= 1 - \cos 2\theta \quad \text{----} \textcircled{A}$$

또,

$$\angle HAQ = \frac{1}{2} \angle HAP$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

이므로

$$\overline{HQ} = \overline{AH} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= (1 - \cos 2\theta) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{----} \textcircled{B}$$

ⓐ와 ⓑ에서

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{HQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 - \cos 2\theta)^2 \times \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin^4 2\theta}{(1 + \cos 2\theta)^2} \times \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

그러므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{f(\theta)}{\theta^4}$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right)^4 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1 + \cos 2\theta)^2}$$

$$\times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 1^2 \times \frac{1}{4} \times 1$$

$$= 2 \quad \text{-----} \textcircled{C}$$

한편, 이등변삼각형 OPA에서 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 ⓐ에서 $\angle H'OP = \theta$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{PH'}$$

$$= 2 \times \overline{OP} \times \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta$$

삼각형 AOP에서 각의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$$\overline{AO} : \overline{AP} = \overline{OR} : \overline{RP}$$

$$1 : 2 \sin \theta = \overline{OR} : 1 - \overline{OR}$$

$$2 \sin \theta \times \overline{OR} = 1 - \overline{OR}$$

$$\overline{OR} = \frac{1}{1 + 2 \sin \theta} \quad \text{----} \textcircled{D}$$

또,

$$\overline{OS} = \overline{OA} \tan (\angle SAO)$$

$$= 1 \times \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{----} \textcircled{E}$$

ⓐ와 ⓑ에서

$$g(\theta) = \triangle OSP - \triangle OSR$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OS} \times \overline{OP} \times \sin (\angle POS)$$

$$- \frac{1}{2} \times \overline{OS} \times \overline{OR} \times \sin (\angle POS)$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OS} \times \sin (\angle POS) \times (\overline{OP} - \overline{OR})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{1}{2\sin\theta + 1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \\
&\quad \times \frac{2\sin\theta}{2\sin\theta + 1}
\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}
&\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta} \\
&= \frac{1}{2} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \\
&\quad \times 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sin\theta + 1} \\
&= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 1 \quad \text{----} \ominus
\end{aligned}$$

따라서, \ominus 과 $\omin�$ 을 이용하면

$$\begin{aligned}
&\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta^4}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

이므로

$$100k = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

정답 50

30. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프를 개형을 그릴 수 있으며 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \frac{x^2 - ax}{e^x} = (x^2 - ax)e^{-x}$$

이므로

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x - a)e^{-x} + (x^2 - ax)e^{-x} \times (-1) \\
&= e^{-x} \{-x^2 + (a+2)x - a\} \\
&= -e^{-x} \{x^2 - (a+2)x + a\}
\end{aligned}$$

이때, $f'(x) = 0$ 에서

$$x^2 - (a+2)x + a = 0 \quad \text{---} \omin�$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned}
D &= (a+2)^2 - 4a \\
&= a^2 + 4 > 0
\end{aligned}$$

또, $\omin�$ 의 서로 다른 두 근은

$$x = \frac{(a+2) \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad \text{---} \omin�$$

이때, $a > 0$ 이므로

$$a+2 = \sqrt{(a+2)^2} > \sqrt{a^2 + 4}$$

그러므로 두 양의 실근을 갖는다.

$\omin�$ 의 두 근을 α, β ($0 < \alpha < \beta$)라 하면 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		↘		↗	↘

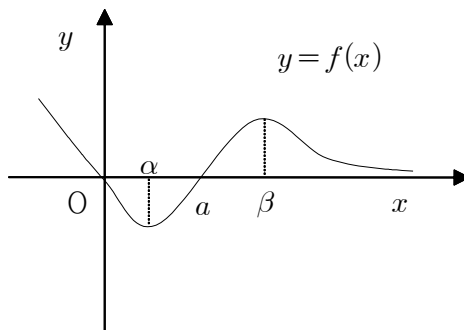
이때,

$$f(0) = 0, f(a) = 0$$

이고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - ax}{e^x} = 0$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



또,

$$f''(x) = e^{-x}\{x^2 - (a+2)x + a\} - e^{-x}\{2x - (a+2)\} = e^{-x}\{x^2 - (a+4)x + 2a + 2\}$$

이때, $f''(x) = 0$ 에서

$$x^2 - (a+4)x + 2a + 2 = 0 \quad \text{---ⓐ}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a+4)^2 - 4 \times 1 \times (2a+2) = a^2 + 8 > 0$$

그러므로 함수 $f(x)$ 가 변곡점을 갖는 x 의 값의 개수는 2이다.

한편, 방정식

$$f(x) = f'(t)(x-t) + f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수

$$y = f(x), \quad y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

의 그래프의 교점의 개수이다.

이때, 직선 $y = f'(t)(x-t) + f(t)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이다.

한편, 함수 $g(t)$ 가 $t = a$ 에서 연속이면

$$g(a) = \lim_{t \rightarrow a} g(t)$$

이므로

$$g(a) + \lim_{t \rightarrow a} g(t)$$

의 값은 짝수이어야 한다.

그런데

$$g(5) + \lim_{t \rightarrow 5} g(t) = 5 \quad \text{---ⓑ}$$

이므로 함수 $g(t)$ 는 $t = 5$ 에서 불연속이다.

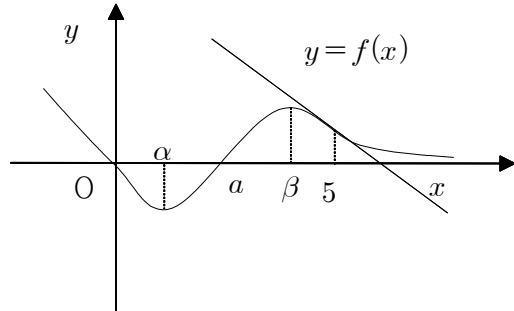
함수 $g(t)$ 가 불연속이 되는 t 의 값은 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값이거나 변곡점을 갖는 x 의 값이다.

한편, 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값을 m 이라 하면 함수 $g(t)$ 는 $t = m$ 에서 극한값을 갖지 않는다.

또, 함수 $f(x)$ 가 변곡점을 갖는 x 의 값

을 n 이라 하면 함수 $g(t)$ 는 $t = n$ 에서 극한값을 갖는다.

그러므로 ⓑ을 만족시키는 t 의 값은 함수 $f(x)$ 가 변곡점을 갖는 x 의 값 중 큰 값이다.



즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = 5$ 에서 변곡점을 갖고 이때

$$\lim_{t \rightarrow 5} g(t) = 3, \quad g(5) = 2$$

이므로 조건을 만족시킨다.

따라서, $x = 5$ 가 방정식 ⓑ의 근이므로 대입하면

$$5^2 - (a+4) \times 5 + 2a + 2 = 0 \\ -3a + 7 = 0$$

$$a = \frac{7}{3} \quad \text{---ⓒ}$$

한편,

$$\lim_{t \rightarrow k^-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow k^+} g(t)$$

를 만족시키는 k 의 값은 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값이다.

ⓒ에 ⓒ을 대입하면

$$x^2 - \left(\frac{7}{3} + 2\right)x + \frac{7}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{7}{3} = 0$$

따라서, 구하는 모든 실수 k 의 값의 합은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\frac{13}{3}$

이므로

$$p + q = 3 + 13 = 16$$

정답 16

■ [선택: 기하]
 23. ③ 24. ② 25. ② 26. ⑤
 27. ④ 28. ① 29. 23 30. 8

23. 출제의도 : 두 벡터가 서로 평행할 조건을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$, $3\vec{a}+k\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$3\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}+2\vec{b})$$

를 만족하는 실수 l 이 존재한다.

$$3\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}+2\vec{b})\text{에서}$$

$$3\vec{a}+k\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$$

$$3=l, k=2l$$

따라서 $k=6$

정답 ③

24. 출제의도 : 쌍곡선의 주축의 길이와 점근선을 이용하여 두 초점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 의 주축의 길이가 6

이므로

$$2a=6$$

$$a=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 의 점근선은

$$y=\frac{b}{a}x, y=-\frac{b}{a}x$$

이때, $a > 0, b > 0$ 이므로

$$\frac{b}{a}=2$$

$$b=2a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$b=2 \times 3=6$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 의 두 초점을

$$F(c, 0), F(-c, 0) \quad (c > 0)$$

이라 하면

$$c^2=a^2+b^2$$

$$=3^2+6^2$$

$$=45$$

$$c=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$\overline{FF'}=2c=6\sqrt{5}$$

정답 ②

25. 출제의도 : 좌표평면에서 두 직선의 방향벡터를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기에 대한 코사인의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 직선

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3}, x-1=\frac{2-y}{3}$$

즉,

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3}, x-1=\frac{y-2}{-3}$$

의 방향벡터를 각각 \vec{d}_1, \vec{d}_2 라 하면

$$\vec{d}_1=(4, 3)$$

$$\vec{d}_2 = (1, -3)$$

따라서

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1| |\vec{d}_2|} \\ &= \frac{|4 \times 1 + 3 \times (-3)|}{\sqrt{4^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{5}{5\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

정답 ②

26. 출제의도 : 타원의 접선의 방정식을 이용하여 사각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 1인

직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{3 \times 1 + 1}$$

$$\text{즉, } y = x \pm 2$$

직선 $y = x + 2$ 와 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 이 접

하는 점이 B이고 직선 $y = x - 2$ 와 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 이 접하는 점이 D일 때, 사각

형 ABCD의 넓이는 최대이다.

두 직선 $y = x + 2$, $y = x - 1$ 사이의 거리를 구해 보자.

직선 $y = x + 2$ 위의 점 $(0, 2)$ 에서 직선 $y = x - 1$ 즉 $x - y - 1 = 0$ 사이의 거리를 d_1 이라 하면

$$d_1 = \frac{|0 - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

두 직선 $y = x - 2$, $y = x - 1$ 사이의 거리를 구해 보자.

직선 $y = x - 2$ 위의 점 $(0, -2)$ 에서 직선 $y = x - 1$ 즉 $x - y - 1 = 0$ 사이의 거리를 d_2 라 하면

$$d_2 = \frac{|0 - (-2) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편, 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 와 직선 $y = x - 1$

이 만나는 두 점 A, C의 좌표를 구해 보자.

$$\frac{x^2}{3} + (x - 1)^2 = 1 \text{에서}$$

$$2x(2x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}$$

$$x = 0 \text{일 때, } y = -1$$

$$x = \frac{3}{2} \text{일 때, } y = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

두 점 A, C가

$$A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), C(0, -1)$$

이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times d_1 + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times d_2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3$$

정답 ⑤

27. 출제의도 : 벡터의 성질을 이용하여 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

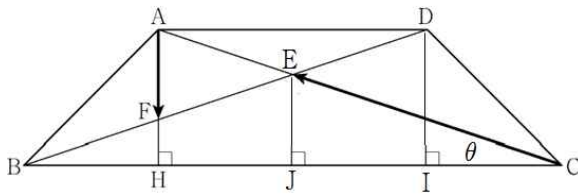
정답풀이 :

직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AB} = \sqrt{2}, \angle ABC = 45^\circ$$

이므로

$$\overline{AH} = \overline{BH} = 1$$



점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{BI} = 3, \overline{DI} = 1 \text{ 이고}$$

$\triangle BID \sim \triangle BHF$ 이므로

$$\overline{BI} : \overline{DI} = \overline{BH} : \overline{FH}$$

$$\text{즉, } 3 : 1 = 1 : \overline{FH}$$

$$\overline{FH} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{AF} = \overline{AH} - \overline{FH} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

한편 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J라 하면

$$\overline{BJ} = \overline{CJ} = 2, \overline{BH} = \overline{HJ} = 1$$

이므로

$$\overline{EJ} = 2\overline{FH} = \frac{2}{3}$$

직각삼각형 JCE에서

$\angle JCE = \theta$ 라 하면

$$\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{CE}|}$$

이고,

두 벡터 $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{CE}$ 가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2} + \theta$ 이다.

그리고

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EJ}$$

이므로

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{CE}$$

$$= |\overrightarrow{EJ}| |\overrightarrow{CE}| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$= |\overrightarrow{EJ}| |\overrightarrow{CE}| \times (-\sin\theta)$$

$$= |\overrightarrow{EJ}| |\overrightarrow{CE}| \times \left(-\frac{|\overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{CE}|}\right)$$

$$= -|\overrightarrow{EJ}|^2$$

$$= -\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= -\frac{4}{9}$$

정답 ④

28. 출제의도 : 쌍곡선의 성질과 쌍곡선의 접선을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 양수 a, b 에 대하여 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 이라 하자.}$$

이 쌍곡선이 점 (3, 3)을 지나고 점 (3, 3)에서 직선 $y = 2x - 3$ 에 접할 때,

$\overline{PB} - \overline{PA}$ 는 최대이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (3, 3)에서

의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{a^2} - \frac{3y}{b^2} = 1$$

$$\text{즉, } y = \frac{b^2}{a^2}x - \frac{b^2}{3}$$

이 직선이 $y = 2x - 3$ 이므로

$$\frac{b^2}{a^2} = 2, \quad -\frac{b^2}{3} = -3 \text{에서}$$

$$a^2 = \frac{9}{2}, \quad b^2 = 9$$

두 점 A, B가 쌍곡선의 초점이므로

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{2}$$

$$\text{따라서 } c = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

정답 ①

29. 출제의도 : 포물선의 정의와 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점은 F(2, 0)이고 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

점 P의 x좌표를 $a(0 < a < 2)$ 라 하면

$$P(a, 2\sqrt{2a})$$

$$F'(-2, 2\sqrt{2a})$$

포물선의 성질에 의해

$$\overline{PF} = \overline{PF'} = 2 + a$$

한편, 점 F'을 초점, 점 P를 꼭짓점으로

하는 포물선의 방정식은

$$(y - 2\sqrt{2a})^2 = -4(2+a)(x-a)$$

이 포물선의 준선의 방정식은

$$x = 2a + 2$$

점 Q에서 두 직선 $x = -2, x = 2a + 2$ 에

내린 수선의 발을 각각

R, S라 하면

포물선의 성질에 의해

$$\overline{QF} = \overline{QR},$$

$$\overline{QF'} = \overline{QS}$$

이므로

$$\overline{QF} + \overline{QF'} = \overline{QR} + \overline{QS} = \overline{RS} = 2a + 4$$

사각형 PF'QF의 둘레의 길이가 12이므로

$$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{QF} + \overline{QF'} = 12 \text{에서}$$

$$2\overline{PF'} + \overline{RS} = 12$$

$$2(2+a) + (2a+4) = 12$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

이때, P의 좌표는 $(1, 2\sqrt{2})$ 이고

점 F'을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는

포물선의 방정식은

$$(y - 2\sqrt{2})^2 = -12(x - 1)$$

이다.

두 포물선

$$y^2 = 8x \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

$$(y - 2\sqrt{2})^2 = -12(x - 1) \quad \dots\dots \textcircled{\omin�}$$

이 만나는 점 Q의 y좌표를 구해 보자.

①에서

$$x = \frac{y^2}{8}$$

$$x = \frac{y^2}{8} \text{을 } \textcircled{\omin�} \text{에 대입하면}$$

$$(y-2\sqrt{2})^2 = -12\left(\frac{y^2}{8}-1\right)$$

$$5y^2 - 8\sqrt{2}y - 8 = 0$$

$$(y-2\sqrt{2})(5y+2\sqrt{2}) = 0$$

$$y = 2\sqrt{2} \text{ 또는 } y = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

점 Q의 y좌표는 $-\frac{2\sqrt{2}}{5}$ 이다.

점 Q에서 선분 PF'에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PF'} = 2 - (-1) = 3$$

$$\overline{QH} = 2\sqrt{2} - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{12}{5}\sqrt{2}$$

삼각형 PF'Q의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PF'} \times \overline{QH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{12}{5}\sqrt{2}$$

$$= \frac{18}{5}\sqrt{2}$$

따라서 $p=5$, $q=18$ 이므로

$$p+q = 5+18 = 23$$

정답 23

30. 출제의도 : 벡터의 성질을 이용하여 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} \text{ 이므로}$$

선분 CA, CB, CD, CE, CF의 중점을 각각 A', B', D', E', F'이라 하면

점 X는 정육각형 A'B'CD'E'F' 위의 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직인다.

조건 (나)에서

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD} = k\overrightarrow{CD} \text{ 이므로}$$

$$(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CX}) - \overrightarrow{CX} + 2(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CX}) = k\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{CX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$$

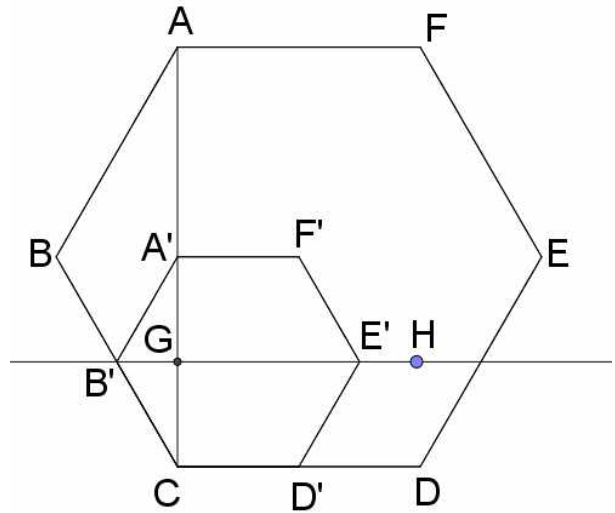
$$\frac{1}{4}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CG} \text{ 라 하면}$$

점 X는 점 G를 지나고 직선 CD에 평행한 직선 위를 움직인다.

직선 GE' 위의 점 H가

$$\overline{E'H} = 1, \overline{GH} > \overline{GE'}$$

를 만족시키도록 점 H를 잡는다.



X가 점 G일 때, $|\overrightarrow{CX}|$ 의 값은 최소이다.

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CG} + \frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD} \text{ 에서}$$

$$\frac{2-k}{4} = 0$$

$$k = 2$$

$$\text{즉, } \alpha = 2$$

점 X가 점 H일 때, $|\overrightarrow{CX}|$ 의 값은 최대이다.

$$|\overrightarrow{GH}| = 4 \text{에서}$$

$$\left| \frac{2-k}{4} \overrightarrow{CD} \right| = 4,$$

$$\text{즉 } \frac{2-k}{4} |\overrightarrow{CD}| = 4 \text{이므로}$$

$$\frac{2-k}{4} \times 4 = 4$$

$$k = -2$$

$$\text{즉, } \beta = -2$$

$$\text{따라서 } \alpha^2 + \beta^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

정답 8