

2023학년도 경찰대학 1차 시험

- 수학 -



응시자 유의사항

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.

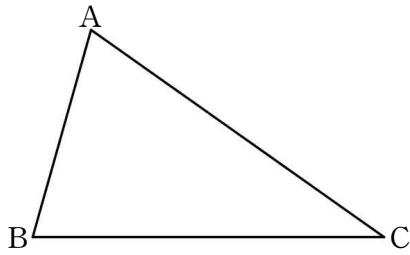
경 찰 대 학

<http://www.police.ac.kr>

※ 총 8쪽 25문항(3점 5문항, 4점 15문항, 5점 5문항)입니다.
[1~20] 각 문항의 답을 하나만 고르시오.

1. 넓이가 $5\sqrt{2}$ 인 예각삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 5$ 일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [3점]

- ① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$



2. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_P(t) = 3t^2 + 2t - 4, \quad v_Q(t) = 6t^2 - 6t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 처음으로 만나는 위치는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 직선 $x=a$ 와 세 함수

$$f(x) = 4^x, \quad g(x) = 2^x, \quad h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

의 그래프가 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{PQ} : \overline{QR} = 8 : 3$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4. 자연수 $k(k \geq 2)$ 에 대하여 집합

$$A = \{(a, b) \mid a, b \text{는 자연수}, 2 \leq a \leq k, \log_a b \leq 2\}$$

의 원소의 개수가 54일 때, 집합 A의 원소 (a, b) 에 대하여 $a+b+k$ 의 최댓값은? [3점]

- ① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

5. 사차함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극값 2를 갖고, $f(x)$ 가 x^3 으로 나누어떨어질 때, $\int_0^2 f(x-1)dx$ 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $-\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

6. 두 정수 a, b 에 대하여

$$a^2 + b^2 \leq 13, \quad \cos \frac{(a-b)\pi}{2} = 0$$

을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [4점]

- ① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 과 $x=-1$ 에서 극값을 갖는다. $\{x | f(x) \leq 9x+9\} = (-\infty, a]$ 를 만족시키는 양수 a 의 최솟값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 (a, b) 에 대하여 $\log_r |ab|$ 의 최댓값을 $f(r)$ 라 할 때, $f(64)$ 의 값은? (단, r 는 1보다 큰 실수이고, $ab \neq 0$ 이다.) [4점]

- ① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 A 로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 개수는? [4점]

- (가) $\log f(x)$ 는 일대일함수가 아니다.
 (나) $\log\{f(1)+f(2)+f(3)\} = 2\log 2 + \log 3$
 (다) $\log f(4) + \log f(5) \leq 1$

- ① 134 ② 140 ③ 146 ④ 152 ⑤ 158

10. 함수

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & (x \leq 0) \\ -(x-2)^2 + 8 & (x > 0) \end{cases}$$

이 있다. 실수 $m (m < 4)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = mx + 4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(m)$ 이라 할 때, $h(-2) + h(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 75 ② 78 ③ 81 ④ 84 ⑤ 87

11. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^2 - 3n - 2} + 6n - 1}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n-2}}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 110 ② 114 ③ 118 ④ 122 ⑤ 126

12. 좌표평면에서 점 $(18, -1)$ 을 지나는 원 C 가

곡선 $y = x^2 - 1$ 과 만나도록 하는 원 C 의 반지름의 길이의 최솟값은? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ② $\sqrt{17}$ ③ $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ ④ $2\sqrt{17}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{17}}{2}$

13. 좌표평면 위의 점 (a, b) 에서 곡선 $y = x^2$ 에 그은 두 접선이 서로 수직이고 $a^2 + b^2 \leq \frac{37}{16}$ 일 때, $a+b$ 의 최댓값을 p , 최솟값을 q 라 하자. pq 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{33}{16}$ ② $-\frac{35}{16}$ ③ $-\frac{37}{16}$ ④ $-\frac{39}{16}$ ⑤ $-\frac{41}{16}$

14. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$f(1) = 2, g(1) = 0, f'(1) = 3, g'(1) = 2$$

일 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^4 \left\{ x f \left(1 + \frac{3^k}{x} \right) g \left(1 + \frac{3^k}{x} \right) \right\}$ 의 값은? [4점]

- ① 400 ② 440 ③ 480 ④ 520 ⑤ 560

15. 좌표평면에서 정삼각형 ABC에 내접하는 반지름의 길이가 1인 원 S가 있다. 실수 $t (0 \leq t \leq 1)$ 에 대하여 삼각형 ABC 위의 점 P와 원 S의 거리가 t 인 점 P의 개수를 $f(t)$ 라 하자. 함수 $f(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 k 의 개수를 a , $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = b$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

(여기서, 점 P와 원 S의 거리는 점 P와 원 S 위의 점 X에 대하여 선분 PX의 길이의 최솟값이다.) [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

16. 좌표평면에 네 점 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$ 이 있다. 자연수 n 에 대하여 집합 X_n 은 다음 조건을 만족시키는 모든 점 (a, b) 를 원소로 하는 집합이다.

- (가) 점 (a, b) 는 정사각형 $ABCD$ 의 내부에 있다.
 (나) 정사각형 $ABCD$ 의 변 위를 움직이는 점 P 와 점 (a, b) 사이의 거리의 최솟값은 $\frac{1}{2^n}$ 이다.
 (다) $a = \frac{1}{2^k}$ 이고 $b = \frac{1}{2^m}$ 인 자연수 k, m 이 존재한다.

집합 X_n 의 원소의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 100 ② 120 ③ 140 ④ 160 ⑤ 180

17. 두 자연수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \sin(a\pi x) + 2b \quad (0 \leq x \leq 1)$$

이 있다. 집합 $\{x \mid \log_2 f(x) \text{는 정수}\}$ 의 원소의 개수가 8이 되도록 하는 서로 다른 모든 a 의 값의 합은? [5점]

- ① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

18. 함수

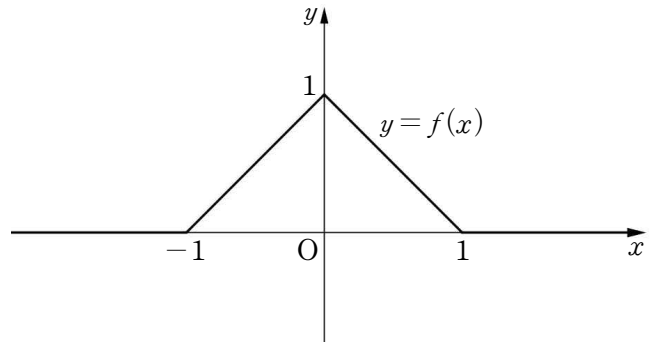
$$f(x) = \begin{cases} 1+x & (-1 \leq x < 0) \\ 1-x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_{-1}^x f(t)\{2x - f(t)\} dt$$

라 할 때, 함수 $g(x)$ 의 최솟값은? [5점]

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{5}{12}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{7}{12}$



19. 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ 의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{(x-3)g(x)} = k$ (k 는 0이 아닌 상수)

(다) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{g'(x)} = \infty$

$f(x)$ 의 차수의 최솟값이 m 이다. $f(x)$ 의 차수가 최소일 때, $m+k$ 의 값은? [5점]

- ① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{43}{12}$ ③ $\frac{23}{6}$ ④ $\frac{49}{12}$ ⑤ $\frac{13}{3}$

20. 곡선 $y=x^3-x^2$ 위의 제 1사분면에 있는 점 A 에서의 접선의 기울기가 8이다. 점 $(0, 2)$ 를 중심으로 하는 원 S 가 있다. 두 점 $B(0, 4)$ 와 원 S 위의 점 X 에 대하여 두 직선 OA 와 BX 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\overline{BX} \sin \theta$ 의 최댓값이 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 가 되도록 하는 원 S 의 반지름의 길이는? (단, O 는 원점이다.) [5점]

- ① $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{17\sqrt{5}}{20}$ ④ $\frac{9\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{19\sqrt{5}}{20}$

[21~25] 각 문항의 답을 답안지에 기재하시오.

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2k-1} = 2^n$$

을 만족시킬 때, $a_1 + a_5$ 의 값을 구하시오. [3점]

22. 실수 a, b, c 가

$$\log \frac{ab}{2} = (\log a)(\log b),$$

$$\log \frac{bc}{2} = (\log b)(\log c),$$

$$\log (ca) = (\log c)(\log a)$$

를 만족시킬 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 모두 10보다 크다.) [4점]

23. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 & (x < 1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이고 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(3)$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

24. 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$(a \sin^2 x - 4) \cos x + 4 \geq 0$$

을 만족시키는 실수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

[4점]

25. 세 집합 A, B, C 는

$$A = \left\{ (2 + 2\cos\theta, 2 + 2\sin\theta) \mid -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\},$$

$$B = \left\{ (-2 + 2\cos\theta, 2 + 2\sin\theta) \mid \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} \right\},$$

$$C = \{(a, b) \mid -3 \leq a \leq 3, b = 2 \pm \sqrt{3}\}$$

이다. 좌표평면에서 집합 $A \cup B \cup C$ 의 모든 원소가 나타내는 도형을 X 라 하고, 도형 X 와 곡선 $y = -\sqrt{3}x^2 + 2$ 가 만나는 점의 y 좌표를 c 라 하자. 집합 X 로 둘러싸인 부분의 넓이를 α , 곡선 $y = -\sqrt{3}x^2 + 2$ 와 직선 $y = c$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 β 라 하자. $\alpha - \beta = \frac{p\pi + q\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 정수이다.) [5점]

※ 확인사항

▷ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입·표기했는지 확인하시오.