2023학년도 신입생 수시모집

논술고사 문제지(자연계)

경희대학교

[11월 20일(일) 오전]

지원학부(과) (   ) 수험번호 | | | | | | | | | | | 성 명 (   )

<유의사항 : 아래 내용 위반시 감점 또는 0점 처리할 수 있음>

1. 답안의 작성과 정정은 반드시 본교에서 지급한 흑색 필기구를 사용하시오.
2. 답안지에 제목을 쓰지 말고, 특별한 표시를 하지 마시오.
3. 답안지에 답안과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마시오(예: 감사합니다 등).
4. 답안 작성 시 논제번호(예: Ⅰ, Ⅱ…)에 맞춰 답안을 작성하며, 논제별 소문제번호[예: (1), (2)…]를 쓰고 이어서 논술하시오.
5. 답안 정정 시에는 두 줄을 긋고 작성하며, 수정도구(수정액 또는 수정테이프) 사용은 절대 불가하므로 유의하시오.
6. 논제별 분량 제한을 준수하고 답안지는 반드시 1장만 사용하시오.
7. 지정된 답안의 작성 영역을 벗어나지 않도록 각별히 유의하시오.
8. **자연계 문제지는 총 2장 3쪽입니다.**

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (100점)

[가] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서 접하는 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

[나] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

[다] 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

[라] 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표와 같다.

[마] 닫힌구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)\,dx \text{ (단, } S(x)\text{는 닫힌구간 } [a,\ b]\text{에서 연속)}$$

[바] 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $p\,(0<p<1)$일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

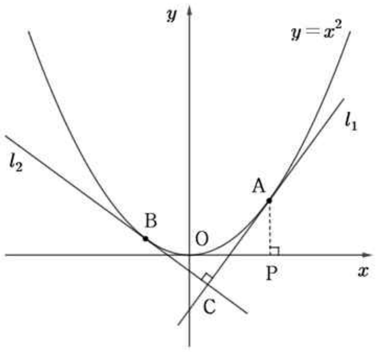
$$_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}(1-p)^{n-r} \text{ (단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

[사] 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

< 뒷면에 계속 >

[논제 I] 곡선 $y=x^2$ 위를 움직이는 점 A(x, y)의 시각 t에서의 위치가 $x=t$, $y=t^2$이다. 이 점 A에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 접선을 l_1이라 하고, 직선 l_1과 수직이고 곡선 $y=x^2$에 접하는 접선을 l_2라고 하자. 접선 l_2와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점을 B라 하고, 원점을 O라고 하자. 다음 물음에 답하시오. (단, $t>0$)



(1) 두 접선 l_1과 l_2의 교점을 C라고 하자. 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 C가 움직인 거리 s를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

(2) 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 P라고 하자. 시각 t에서 두 삼각형 AOP와 ABC의 넓이의 비를 $S(t)=\frac{\triangle ABC}{\triangle AOP}$ 라고 할 때, $\lim_{t\to\infty} S(t)$를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

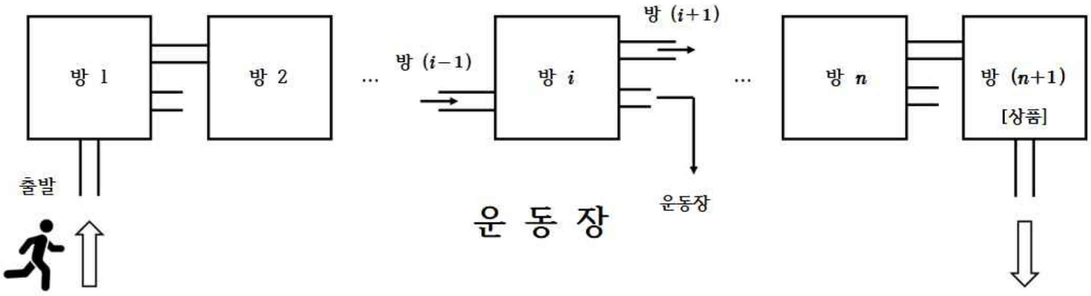
[논제 II] 함수 $f(x)=-x+\frac{1}{x^2}$, $g(x)=-x^2+k+\frac{1}{x}$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $x>0$, k는 상수이다.)

(1) 구간 $(0, \infty)$에서 함수 $y=x+\frac{1}{x}$의 증가와 감소를 표로 나타내시오. 이 결과를 이용하여 상수 k가 양수일 때 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만남을 보이고, 그 근거를 논술하시오.
(단, $\lim_{x\to 0+}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\infty$) (18점)

(2) (1)에서 두 교점의 x좌표를 각각 α와 β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$을 k에 대한 식으로 나타내고, 그 식을 $S(k)$라 하자. 닫힌구간 $[4, 10]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $6S(x)$인 입체도형의 부피를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

< 다음 면에 계속 >

[논제 Ⅲ] 아래 그림과 같이 운동장 안에 $(n+1)$개의 연결된 방이 있다. 모든 $i=1, 2, \cdots, n$에 대하여 방 i에는 두 개의 출구가 있어서, 그 중 하나만 방 $(i+1)$과 연결되어 있고 다른 하나는 운동장으로 나오는 출구이다. 방 $(n+1)$에는 운동장으로 나오는 출구만 있다.



각각 $1, 2, \cdots, n$번 조끼를 입은 학생들이 운동장에 모여 있고 아래와 같은 규칙으로 방을 통과하는 게임에 참여한다.

(가)	1번 조끼를 입은 학생부터 조끼 번호의 오름차순으로 한 명씩 방 1로 들어간다.
(나)	모든 $i=1, 2, \cdots, n$에 대하여 방 i에 처음으로 도착한 학생은 두 개의 출구 중 하나를 선택한다. 이때 다음 방으로 연결된 출구를 선택하면 이 학생은 다음 방으로 가고, 그렇지 않으면 운동장으로 나온다. 방 $(n+1)$에 도착한 모든 학생은 상품을 받고 출구를 통해 운동장으로 나온다. (단, 지나온 길을 되돌아가지는 않는다.)
(다)	먼저 출발한 학생이 운동장으로 나오면, 그 다음 학생은 방 1로 들어간다. 먼저 출발한 학생이 방 i의 출구($i=1, 2, \cdots, n$)에서 운동장으로 나오면, 그 다음에 출발하는 학생은 방 1부터 연결된 출구들을 통해 방 $(i+1)$로 간다. 먼저 출발한 학생이 방 $(n+1)$에서 나오면, 그 다음 학생은 항상 방 $(n+1)$까지 간다.
(라)	n번 조끼를 입은 학생이 방 1로 들어가서, 운동장으로 다시 나오면 게임은 끝난다.

모든 $i=1, 2, \cdots, n$에 대하여 방 i의 두 개의 출구 중에서 운동장으로 나오는 출구를 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$이며, 각각의 선택은 독립이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $n=7$이라고 하자. 6번 조끼를 입은 학생이 상품을 받을 때, 3번 조끼를 입은 학생이 상품을 받지 못하였을 확률을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (17점)

(2) $n=400$일 때 상품을 받은 학생이 190명 이상일 사건을 A라 하고, $n=72$일 때 상품을 받은 학생이 k명 이상일 사건을 B라고 하자. 이때, $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$를 만족하는 자연수 k의 최댓값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

< 끝 > - 총 2장 3쪽입니다. -

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅰ)문항

2. 2023학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

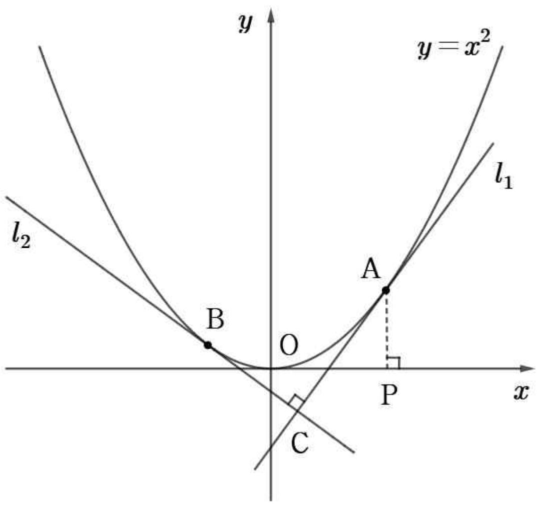
[가] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서 접하는 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

[나] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

[논제 Ⅰ] 곡선 $y=x^2$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{A}(x, y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=t$, $y=t^2$이다. 이 점 A에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 접선을 l_1이라 하고, 직선 l_1과 수직이고 곡선 $y=x^2$에 접하는 접선을 l_2라고 하자. 접선 l_2와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점을 B라 하고, 원점을 O라고 하자. 다음 물음에 답하시오. (단, $t>0$)



(1) 두 접선 l_1과 l_2의 교점을 C라고 하자. 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 C가 움직인 거리 s를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

(2) 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 P라고 하자. 시각 t에서 두 삼각형 AOP와 ABC의 넓이의 비를 $S(t)=\dfrac{\Delta \mathrm{ABC}}{\Delta \mathrm{AOP}}$ 라고 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)$를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

3. 2023학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제 I]에서는 고등학교 교육과정의 이차함수, 이차곡선, 포물선, 접선의 방정식 등의 개념을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악하고자 하였다. 수학, 수학I, 수학II, 미적분, 기하 등의 과목에서 배운 내용을 바탕으로 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하고 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2023학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 I]은 이차함수의 그래프, 곡선 위의 한 점에서의 접선, 두 직선의 교점 등에 대한 내용을 바탕으로 좌표평면 위를 움직이는 점의 위치와 속도를 구할 수 있는지, 그리고 이를 이용하여 좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는지를 묻는다. 시각이 변함에 따라 삼각형이 넓이의 변화를 이해하고 이때 관찰되는 극한을 찾을 수 있는지를 묻고 있다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
고등학교 수학II	김원경 외 14인	㈜비상교육	2022	71	제시문 [가]	X
고등학교 미적분	홍성복 외 10인	㈜지학사	2022	171	제시문 [나]	X

5. 2023학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 I]

(1) (15점)

<9점> 접선의 개념을 이해하고, 좌표평면 위에서 움직이는 점의 위치를 표현할 수 있음.

(기하에서 포물선의 정의를 이용할 수 있음.)

<6점> 좌표평면 위에서 점이 움직이는 거리를 구할 수 있음.

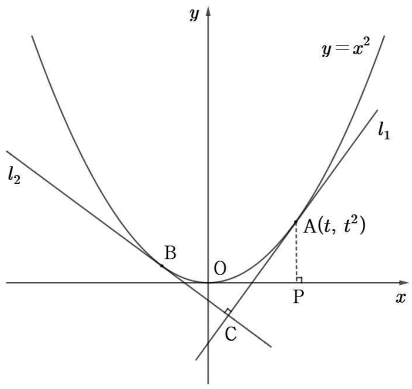
(2) (15점)

<9점> 도형의 넓이를 구할 수 있음.

<6점> 극한의 개념을 이해하고 있음.

6. 2023학년도 수시모집 논술고사 예시답안

[논제 I]



(1) 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(a,\ a^2)$에서 접하는 접선의 기울기는 $2a$이다.

점 $\mathrm{A}(t,\ t^2)$에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 접선의 방정식은 $l_1: y=2tx-t^2$이다.

접선 l_1과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2t}$이고,

접선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2t}$가 되는 곡선 $y=x^2$ 위의 점은 $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{4t},\ \dfrac{1}{16t^2}\right)$이다.

따라서 접선 l_2의 방정식은 $l_2: y=-\dfrac{1}{2t}x-\dfrac{1}{16t^2}$이다.

접선 l_1과 접선 l_2의 교점은 $\mathrm{C}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{8t},\ -\dfrac{1}{4}\right)$이고,

점 $\mathrm{C}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치는 $x(t)=\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{8t}$, $y(t)=-\dfrac{1}{4}$이다.

시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 C가 움직인 거리 s는

$$s=\int_1^2\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8t^2}\right)dt=\frac{9}{16}\text{이다.}$$

(2) 삼각형 AOP의 넓이는 $\dfrac{1}{2}t^3$이다.

삼각형 ABC의 넓이를 구하기 위해 선분 AC와 선분 BC의 길이를 알아야 한다.

점 B와 점 C의 좌표는 $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{4t},\ \dfrac{1}{16t^2}\right)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{8t},\ -\dfrac{1}{4}\right)$이므로,

선분 AC의 길이는 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{t^4+\dfrac{3}{4}t^2+\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{64t^2}}$ 이고,

선분 BC의 길이는 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{64t^2}+\dfrac{1}{256t^4}}$ 이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\Delta\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{t^4+\dfrac{3}{4}t^2+\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{64t^2}}\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{64t^2}+\dfrac{1}{256t^4}}$ 이다.

넓이의 비는

$$S(t)=\frac{\dfrac{1}{2}\sqrt{t^4+\dfrac{3}{4}t^2+\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{64t^2}}\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{64t^2}+\dfrac{1}{256t^4}}}{\dfrac{1}{2}t^2\times t}=\sqrt{1+\frac{3}{4t^2}+\frac{3}{16t^4}+\frac{1}{64t^6}}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{16t^2}+\frac{3}{64t^4}+\frac{1}{256t^6}}\text{ 이다.}$$

이때 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}=0$ 이므로 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t^2}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t^4}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t^6}=0$ 이고, 따라서 넓이의 비의 극한은 $\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=\dfrac{1}{2}$이다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅱ)문항

2. 2023학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]
[다] 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여
① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

[라] 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표와 같다.

[마] 닫힌구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$ (단, $S(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속)

[논제Ⅱ] 함수 $f(x)=-x+\dfrac{1}{x^2}$, $g(x)=-x^2+k+\dfrac{1}{x}$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $x>0$, k는 상수이다.)

(1) 구간 $(0, \infty)$에서 함수 $y=x+\dfrac{1}{x}$의 증가와 감소를 표로 나타내시오. 이 결과를 이용하여 상수 k가 양수일 때 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만남을 보이고, 그 근거를 논술하시오.
(단, $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\infty$) (18점)

(2) (1)에서 두 교점의 x좌표를 각각 α와 β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$을 k에 대한 식으로 나타내고, 그 식을 $S(k)$라 하자. 닫힌구간 $[4, 10]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $6S(x)$인 입체도형의 부피를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

3. 2023학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제II]에서는 고등학교 교육과정의 미분을 활용한 함수의 증가와 감소, 함수의 그래프의 개형, 적분을 활용한 입체도형의 부피 등을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2023학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 II]에서는 함수의 미분, 그래프의 개형, 정적분 등을 이용하여 제시된 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
고등학교 미적분	황선욱 외 8인	(주)미래엔	2022	110	제시문[다]	X
고등학교 미적분	이준열 외 7인	㈜천재교육	2022	118	제시문[라]	X
고등학교 미적분	박교식 외 19인	동아출판(주)	2020	160	제시문[마]	X

5. 2023학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제II]

(1) (18점)

<6점> 함수를 증가와 감소를 표로 구한다.

<6점> 함수의 교점이 만족하는 방정식을 구한다.

<6점> 함수의 그래프의 개형을 이용하여 방정식의 근의 개수가 2개임을 보인다.

(2) (15점)

<5점> 두 근 사이의 관계를 구한다.

<5점> $(\alpha-\beta)^2$을 구한다.

<5점> 입체의 부피를 정적분을 이용하여 구한다.

6. 2023학년도 수시모집 논술고사 예시답안

(1) 먼저 구간 $(0,\infty)$에서 함수 $y=x+\dfrac{1}{x}$의 증가와 감소의 표는 함수의 미분 $y'=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	2	$\nearrow$

$h(x)=f(x)-g(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}-k$라고 두면

두 그래프 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $h(x)=0$의 실근이다.

$t=x+\dfrac{1}{x}$이라고 두면 $t\ge 2$이고 $t^2-t-2-k=0$이다.

k가 양수일 때, $t^2-t-2-k=0$은 2보다 큰 실근 $\dfrac{1+\sqrt{4k+9}}{2}$을 한 개만 가진다.

이 실근을 $t_0=\dfrac{1+\sqrt{4k+9}}{2}$라고 두면 $t=x+\dfrac{1}{x}$이므로 $h(x)=0$의 실근 x는 $x+\dfrac{1}{x}=t_0$의 실근이다.

$x+\dfrac{1}{x}=t_0$의 실근은 두 그래프 $y=x+\dfrac{1}{x}$와 $y=t_0$의 교점의 x좌표이다.

함수 $y=x+\dfrac{1}{x}$의 증가와 감소의 표를 이용하면, 이 함수의 그래프의 개형으로부터

$t_0>2$일 때 $y=x+\dfrac{1}{x}$과 $y=t_0$는 $x>0$ 구간에서 서로 다른 2개의 점에서 만난다.

따라서 $h(x)=0$은 서로 다른 두 개의 실근을 가지고,

두 함수의 그래프 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 서로 다른 2개의 점에서 만난다.

(2) α와 β는 $x+\dfrac{1}{x}=t_0$ 즉 $x^2-t_0x+1=0$의 두 근이므로 $\alpha+\beta=t_0$이고 $\alpha\beta=1$이다.

$t_0=\dfrac{1+\sqrt{4k+9}}{2}$를 대입하여 계산하면

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=k-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{4k+9}$ 이다.

이를 이용하면 $S(x)=x-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{4x+9}$이므로, 입체의 부피는 다음과 같다.

$$\int_4^{10}6S(x)dx=\int_4^{10}6\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4x+9}\right)dx=\left[3x^2-9x+\frac{1}{2}(4x+9)^{\frac{3}{2}}\right]_4^{10}=307$$

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅲ)문항

2. 2023학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

제시문

[바] 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $p\,(0<p<1)$일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

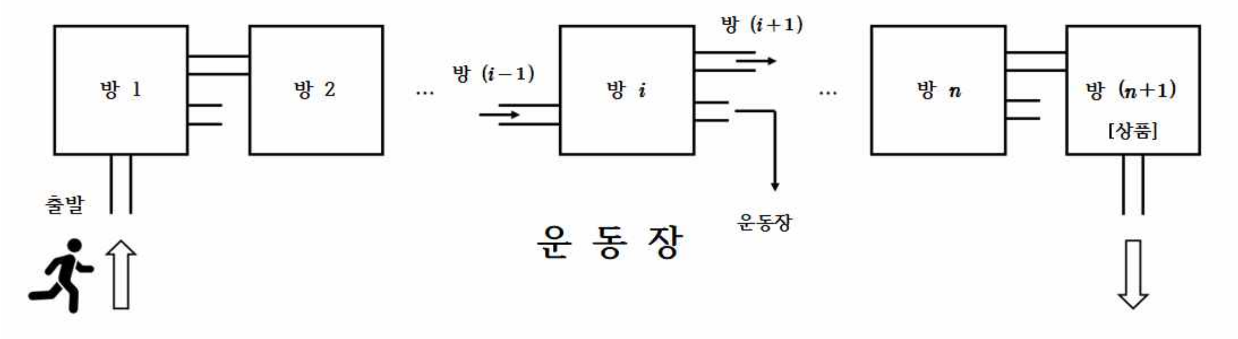
$$ {}_{n}\mathrm{C}_{r}\, p^{r}(1-p)^{n-r} \quad (\text{단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n) $$

[사] 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0) $$

[논제 Ⅲ] 아래 그림과 같이 운동장 안에 $(n+1)$개의 연결된 방이 있다. 모든 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여 방 i에는 두 개의 출구가 있어서, 그 중 하나만 방 $(i+1)$과 연결되어 있고 다른 하나는 운동장으로 나오는 출구이다. 방 $(n+1)$에는 운동장으로 나오는 출구만 있다.

각각 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$번 조끼를 입은 학생들이 운동장에 모여 있고 아래와 같은 규칙으로 방을 통과하는 게임에 참여한다.



(가)	1번 조끼를 입은 학생부터 조끼 번호의 오름차순으로 한 명씩 방 1로 들어간다.
(나)	모든 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여 방 i에 처음으로 도착한 학생은 두 개의 출구 중 하나를 선택한다. 이때 다음 방으로 연결된 출구를 선택하면 이 학생은 다음 방으로 가고, 그렇지 않으면 운동장으로 나온다. 방 $(n+1)$에 도착한 모든 학생은 상품을 받고 출구를 통해 운동장으로 나온다. (단, 지나온 길을 되돌아가지는 않는다.)
(다)	먼저 출발한 학생이 운동장으로 나오면, 그 다음 학생은 방 1로 들어간다. 먼저 출발한 학생이 방 i의 출구($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)에서 운동장으로 나오면, 그 다음에 출발하는 학생은 방 1부터 연결된 출구들을 통해 방 $(i+1)$로 간다. 먼저 출발한 학생이 방 $(n+1)$에서 나오면, 그 다음 학생은 항상 방 $(n+1)$까지 간다.
(라)	n번 조끼를 입은 학생이 방 1로 들어가서, 운동장으로 다시 나오면 게임은 끝난다.

모든 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여 방 i의 두 개의 출구 중에서 운동장으로 나오는 출구를 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$이며, 각각의 선택은 독립이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $n=7$ 이라고 하자. 6번 조끼를 입은 학생이 상품을 받을 때, 3번 조끼를 입은 학생이 상품을 받지 못하였을 확률을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (17점)

(2) $n=400$ 일 때 상품을 받은 학생이 190명 이상일 사건을 A라 하고, $n=72$ 일 때 상품을 받은 학생이 k 명 이상일 사건을 B라고 하자. 이때, $\mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(B)$를 만족하는 자연수 k 의 최댓값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)

3. 2023학년도 수시모집 논술고사출제 의도

자연계 [논제 III]에서는 고등학교 수학 교육과정 확률과 통계 영역 확률의 독립, 독립시행, 확률변수, 이항분포 및 정규분포 등의 중요한 확률의 중요한 개념을 잘 이해하여 종합적으로 문제에 적용할 수 있는지를 평가 할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 실생활과 관련된 상황에서 수학의 이론과 개념을 활용하여 문제 해결 방법을 수립하고 최적의 해결 전략을 고려할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 또한, 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2023학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 III]에서는 확률의 기본 성질, 조건부확률, 사건의 독립과 종속, 독립시행, 이항분포 및 정규분포 등의 개념을 이해하고 주어진 실생활과 관련된 상황에서의 확률을 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
확률과통계	황선욱 외 9인	㈜미래엔	2020	65	제시문[바]	X
확률과통계	이준열 외 7인	㈜천재교육	2021	62	제시문[사]	X

5. 2023학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 Ⅲ]
(1) (17점)
<12점> 독립시행의 사건을 이용하여 확률을 구한다.
<5점> 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구한다.

(2) (20점)
<14점> 이항분포와 정규분포의 관계를 알고, 표준정규분포를 사용하여 확률을 구한다.
<6점> 표준정규분포로 표현된 두 확률값을 비교하여 k의 값을 찾는다.

6. 2023학년도 수시모집 논술고사 예시답안

[논제 III]

(1) 6번 조끼를 입은 학생이 상품을 받은 사건을 C, 3번 조끼를 입은 학생이 상품을 받지 못하였을 사건을 D라 하자. 6번 조끼를 입은 학생이 상품을 받는 경우는, 상품을 받지 못한 학생의 수가 $0,1,2,3,4,5$명 일 때이다. 3번 조끼를 입은 학생이 상품을 받지 못하는 경우는, 상품을 받지 못한 학생의 수가 $3,4,5,6,7$명 일 때이다.

따라서, 사건 C의 확률은 두 개의 출구 중 하나의 출구를 선택하는 시행에서 이를 7회 반복할 때, 운동장으로 나오는 출구를 $0,1,2,3,4,5$개 선택하는 경우의 확률과 같다. 사건 $C\cap D$의 확률은 두 개의 출구 중 하나의 출구를 선택하는 시행에서 이를 7회 반복할 때, 운동장으로 나오는 출구를 $3,4,5$개 선택하는 경우의 확률과 같다.

제시문 [바]에 의하여 $p=\dfrac{1}{2}$이므로 사건 C의 확률은

$${}_7C_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_5\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{120}{128}$$

이고, $C\cap D$의 확률은

$${}_7C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7C_5\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{91}{128}$$

따라서, 6번 조끼를 입은 학생이 상품을 받을 때, 3번 조끼를 입은 학생이 상품을 받지 못하였을 확률을 조건부 확률의 정의를 이용하여 계산하면 $\dfrac{91}{120}$이다.

(2) 400명의 학생이 게임에 참가할 때, 상품을 받지 못한 학생 수를 확률변수 X_A라고 하면 X_A는 운동장으로 나가는 출구를 선택한 횟수와 같다. 따라서, X_A는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로 평균 m_A와 표준편차 σ_A는

$$m_A=400\times\frac{1}{2}=200,\ \sigma_A=\sqrt{400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=10$$

이때 학생의 수 400과 평균 200이 충분히 크므로 X_A는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따른다. 확률변수 $Z=\dfrac{X_A-200}{10}$은 표준정규분포를 따르므로, 표준정규분포를 이용하여 $\mathrm{P}(A)$를 구한다.

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X_A\le 210)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{210-200}{10}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1)\ \cdots\ ①$$

72명의 학생이 게임에 참가할 때, 상품을 받지 못한 학생 수를 확률변수 X_B라고 하면 X_B는 운동장으로 나가는 출구를 선택한 횟수와 같다. 따라서, X_B는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로 평균 m_B와 표준편차 σ_B는

$$m_B=72\times\frac{1}{2}=36,\ \sigma_A=\sqrt{72\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{18}$$

이때 학생의 수 72와 평균 36이 충분히 크므로 X_B는 정규분포 $\mathrm{N}(36,\ 18)$을 따른다.

확률변수 $Z=\dfrac{X_B-36}{\sqrt{18}}$은 표준정규분포를 따르므로, 표준정규분포를 이용하여 $\mathrm{P}(B)$를 구한다.

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(X_B\le 72-k)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{36-k}{\sqrt{18}}\right)\ \cdots\ ②$$

①과 ②의 계산값에서 $1\le\dfrac{36-k}{\sqrt{18}}$일 때만 $\mathrm{P}(Z\le 1)\le\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{36-k}{\sqrt{18}}\right)$이다.

따라서 $\mathrm{P}(A)\le\mathrm{P}(B)$를 만족하는 가장 큰 자연수 k는 31이다.