2023학년도 신입생 수시모집

논술고사 문제지(자연계)

경희대학교

[11월 19일(토) 오후]

지원학부(과) (　　　　　　　　　)　　수험번호 | | | | | | | | | | |　　성 명 (　　　　　　)

<유의사항 : 아래 내용 위반시 감점 또는 0점 처리할 수 있음>

1. 답안의 작성과 정정은 반드시 본교에서 지급한 흑색 필기구를 사용하시오.
2. 답안지에 제목을 쓰지 말고, 특별한 표시를 하지 마시오.
3. 답안지에 답안과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마시오(예: 감사합니다 등).
4. 답안 작성 시 논제번호(예: Ⅰ, Ⅱ…)에 맞춰 답안을 작성하며, 논제별 소문제번호[예: (1), (2)…]를 쓰고 이어서 논술하시오.
5. 답안 정정 시에는 두 줄을 긋고 작성하며, 수정도구(수정액 또는 수정테이프) 사용은 절대 불가하므로 유의하시오.
6. 논제별 분량 제한을 준수하고 답안지는 반드시 1장만 사용하시오.
7. 지정된 답안의 작성 영역을 벗어나지 않도록 각별히 유의하시오.
8. **자연계 문제지는 총 2장 3쪽입니다.**

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (100점)

[가] 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

[나] 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에서

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[다] $a>b$일 때, 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$는 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

[라] 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 $a,\ b,\ c$를 포함하는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

[마] 함수 $f(t)$가 실수 a를 포함하는 구간에서 연속이면 이 구간에 속하는 임의의 x에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

[바] 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

[사] 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $p\ (0<p<1)$일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r\,p^r(1-p)^{n-r}\ (\text{단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

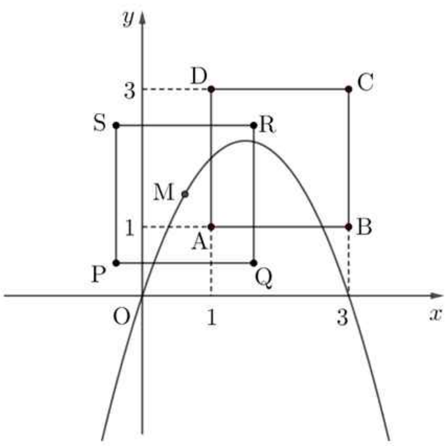
< 뒷면에 계속 >

[논제 Ⅰ] $a>b>0$인 두 상수 a, b에 대하여 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자.

(1) $k>a$인 상수 k에 대하여 점 A$(k, 0)$에서 타원에 그은 접선 중 접점의 y좌표가 양수인 접선을 l이라 할 때, 그 접점을 P라고 하자. 이때 P의 좌표를 a, b, k를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

(2) (1)에서 $a=5$, $b=4$, $k=13$이라고 하자. 접점 P를 지나고 접선 l에 수직인 직선 l'이 x축과 만나는 점을 Q라고 하자. 이때 $\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{QF}}}+\frac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\overline{\mathrm{QF'}}}$의 값을 구하여 기약분수로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

[논제 Ⅱ] 네 점 A$(1, 1)$, B$(3, 1)$, C$(3, 3)$, D$(1, 3)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 한 변의 길이가 2이고, 모든 변이 x축 또는 y축과 평행한 정사각형 PQRS의 두 대각선의 교점 M(x, y)의 위치는 $x=t$, $y=-t^2+3t$이다.
이때 $0<t<3$에서 두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라고 하자. (단, $f(0)=f(3)=0$)



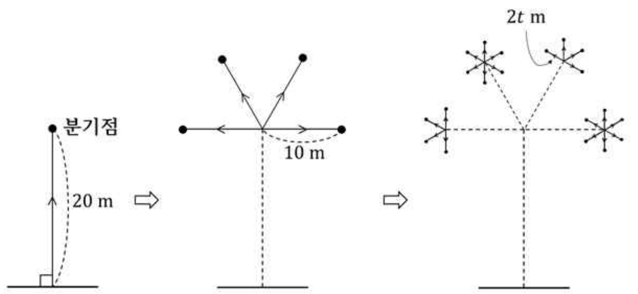
(1) 함수 $f(t)$를 구하고, 함수 $g(t)=\begin{cases} 2t & (t<2) \\ 12-4t & (t\geq 2) \end{cases}$ 에 대하여 $\int_0^3 |f(t)-g(t)|\,dt$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (18점)

(2) 상수 a에 대하여 곡선 $y=f(t)$ $(1\leq t\leq 2)$, 직선 $y=f(a)$ 및 두 직선 $t=1$, $t=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(a)$라고 하자. $1<a<2$일 때 $S(a)$가 최소가 되는 a의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

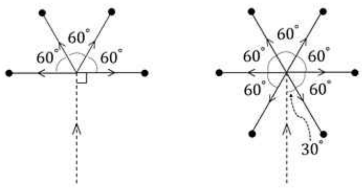
< 다음 면에 계속 >

[논제 Ⅲ] 어느 불꽃놀이에서 불꽃을 쏘아 올리면 불꽃이 지면에서 출발한다. 이 불꽃은 지면에서 수직 방향으로 20 m를 이동한 후 네 갈래 또는 여섯 갈래로 갈라지면서 이동한다. 이 갈라지는 지점을 '첫 번째 분기점'이라고 한다. 첫 번째 분기점에서 갈라진 불꽃들은 각각 10 m씩 이동하여 다시 네 갈래 또는 여섯 갈래로 갈라지면서 이동한다. 두 번째 갈라지는 지점을 '두 번째 분기점'이라고 한다. 두 번째 분기점들에서 갈라진 불꽃들은 각각 $2t$ m씩 이동한 후 사라진다. (단, $0<t<\frac{5}{2}$)

<그림 1>은 첫 번째 분기점에서 네 갈래로 갈라지고 두 번째 분기점에서 각각 4, 6, 4, 6 갈래로 갈라진 경우의 예시이다.
<그림 2>는 점선을 따라 이동한 불꽃이 분기점에서 네 갈래 또는 여섯 갈래로 갈라지는 모양을 나타낸 것이다. 점선의 화살표 방향을 따라 이동한 불꽃은 <그림 2>와 같은 각도로만 갈라진다.



<그림 1>



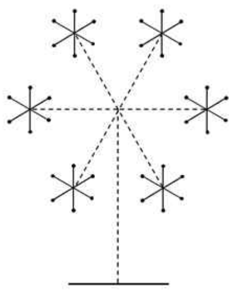
<그림 2>

다음 조건을 만족할 때 아래 물음에 답하시오.

(가) 각 분기점에서 불꽃이 갈라지는 시행은 독립시행이다.
(나) 각 분기점에서 불꽃이 네 갈래로 갈라질 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
(다) 불꽃은 한 평면 위에서 움직인다.
(라) 불꽃은 동일한 속력으로 움직이고, 직선으로 이동한다. (단, 분기점은 제외한다.)

(1) 두 번째 분기점에서 생기는 불꽃의 개수를 확률변수 X라고 하자. $22 \leq X \leq 26$인 사건 A가 일어났을 때, 첫 번째 분기점에서 불꽃이 여섯 갈래로 갈라진 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (18점)

(2) <그림 3>과 같이 모든 분기점에서 불꽃이 여섯 갈래로 갈라진 경우를 생각하자. 36개로 갈라진 불꽃의 마지막 위치를 점으로 나타낼 때, 이 점들 사이의 거리의 최솟값을 $f(t)$라고 하자. $0<t<\frac{5}{2}$일 때, 함수 $y=f(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (19점)


<그림 3>

< 끝 > - 총 2장 3쪽입니다. -

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅰ)문항

2. 2023학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[가] 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

[논제 Ⅰ] $a>b>0$인 두 상수 $a,\ b$에 대하여 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 의 두 초점을 $\mathrm{F},\ \mathrm{F}'$이라 하자.

(1) $k>a$인 상수 k에 대하여 점 $\mathrm{A}(k,\ 0)$에서 타원에 그은 접선 중 접점의 y좌표가 양수인 접선을 l이라 할 때, 그 접점을 P라고 하자. 이때 P의 좌표를 $a,\ b,\ k$를 이용하여 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

(2) (1)에서 $a=5,\ b=4,\ k=13$이라고 하자. 접점 P를 지나고 접선 l에 수직인 직선 l'이 x축과 만나는 점을 Q라고 하자. 이때 $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{QF}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{PF}'}}{\overline{\mathrm{QF}'}}$의 값을 구하여 기약분수로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

3. 2023학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제 Ⅰ]에서는 고등학교 수학 교육과정의 타원의 방정식과 타원에 접하는 접선의 방정식을 활용하여 주어진 점을 지나는 타원의 접선 및 접점을 구하고, 초점의 좌표를 구해 두 점 사이의 길이를 구하는 문제를 출제하여 논리적으로 사고하고 수학적으로 추론할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다. 단순히 공식을 이용하여 문제의 답을 구하는 능력보다는 주어진 상황을 이해한 후 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 갖고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2023학년도 수시모집 논술고사문항 해설

좌표평면 위의 한 점을 지나는 타원의 접선을 구하고, 타원과 접하는 점의 좌표를 구할 수 있다. 또한 접점을 지나며 접선과 수직인 직선을 구할 수 있으며, 이 직선과 x축이 만나는 점의 좌표를 구할 수 있다. 마지막으로 두 점 사이의 거리를 이용하여 주어진 점들 사이의 거리를 구할 수 있다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
고등학교 기하	류희찬 외 9인	㈜천재교과서	2020	43	제시문[가]	X

5. 2023학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 I]
(1) (15점)
<5점> 점 P에서의 접선의 방정식을 구한다.
<10점> 이 접선이 점 A를 지나고, P가 타원 위의 점임을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.

(2) (15점)
<5점> 점 Q의 좌표를 구한다.
<10점> 두 초점 F, F′의 좌표를 구하여 선분들의 길이의 비를 구한다.

6. 2023학년도 수시모집 논술고사 예시답안

[논제 I]

(1) 접점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 한다면, 점 P에서의 접선 l의 방정식은 $\dfrac{x_1 x}{a^2}+\dfrac{y_1 y}{b^2}=1$이다. 이 직선이 $\mathrm{A}(k,\ 0)$을 지나므로, $x_1=\dfrac{a^2}{k}$이다. 또한, P가 타원 위의 점이므로, $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$이다. 한편, y_1은 양수이므로, $y_1=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2b^2}{k^2}}=b\sqrt{1-\dfrac{a^2}{k^2}}$ 이다. 따라서 접점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{a^2}{k}, b\sqrt{1-\dfrac{a^2}{k^2}}\right)$이다.

(2) $a=5,\ b=4,\ k=13$일 때, $x_1=\dfrac{25}{13}$, $y_1=\dfrac{48}{13}$이다. 따라서 접선 l의 기울기는 $-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}=-\dfrac{1}{3}$이다. 그러므로 직선 l'은 기울기가 3이며 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{25}{13},\ \dfrac{48}{13}\right)$을 지나는 직선이고, 이 직선의 방정식은 $y=3x-\dfrac{27}{13}$이다. 따라서 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{9}{13},\ 0\right)$이다.
한편, 두 초점 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$의 좌표를 각각 $(-c,\ 0),\ (c,\ 0)$이라 하면, (단 $c>0$) $c=\sqrt{5^2-4^2}=3$ 이므로, $\mathrm{F}_1(-3,\ 0)$, $\mathrm{F}_2(3,\ 0)$이다. 그러므로 각 선분의 길이는 $\overline{\mathrm{PF}_1}=\sqrt{\dfrac{64^2+48^2}{13^2}}=\dfrac{80}{13}$, $\overline{\mathrm{PF}_2}=\sqrt{\dfrac{14^2+48^2}{13^2}}=\dfrac{50}{13}$, $\overline{\mathrm{QF}_1}=\dfrac{9}{13}+3=\dfrac{48}{13}$, $\overline{\mathrm{QF}_2}=3-\dfrac{9}{13}=\dfrac{30}{13}$이다. 따라서 $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}_1}}{\overline{\mathrm{QF}_1}}+\dfrac{\overline{\mathrm{PF}_2}}{\overline{\mathrm{QF}_2}}=\dfrac{\frac{80}{13}}{\frac{48}{13}}+\dfrac{\frac{50}{13}}{\frac{30}{13}}=\dfrac{5}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{3}$이다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅱ)문항

2. 2023학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[나] 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에서

① $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[다] $a > b$일 때, 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$는 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

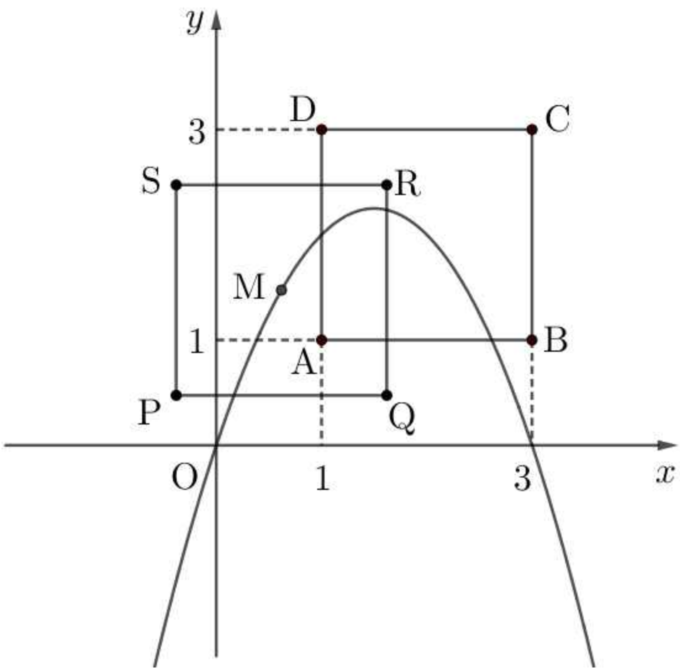
[라] 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

[마] 함수 $f(t)$가 실수 a를 포함하는 구간에서 연속이면 이 구간에 속하는 임의의 x에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

[논제 Ⅱ] 네 점 $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 3)$, $D(1, 3)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 한 변의 길이가 2이고, 모든 변이 x축 또는 y축과 평행한 정사각형 PQRS의 두 대각선의 교점 $M(x, y)$의 위치는 $x = t$, $y = -t^2 + 3t$이다. 이때 $0 < t < 3$에서 두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라고 하자. (단, $f(0) = f(3) = 0$)



(1) 함수 $f(t)$를 구하고, 함수 $g(t)=\begin{cases} 2t & (t<2) \\ 12-4t & (t \geq 2) \end{cases}$ 에 대하여 $\int_0^3 |f(t)-g(t)|\,dt$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (18점)

(2) 상수 a에 대하여 곡선 $y=f(t)$ $(1 \leq t \leq 2)$, 직선 $y=f(a)$ 및 두 직선 $t=1$, $t=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(a)$라고 하자. $1<a<2$일 때 $S(a)$가 최소가 되는 a의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

3. 2023학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제 II]에서는 고등학교 교육과정의 함수의 미분과 적분의 기본 개념을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2023학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 II]에서는 함수의 미분과 적분을 이용하여 제시된 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

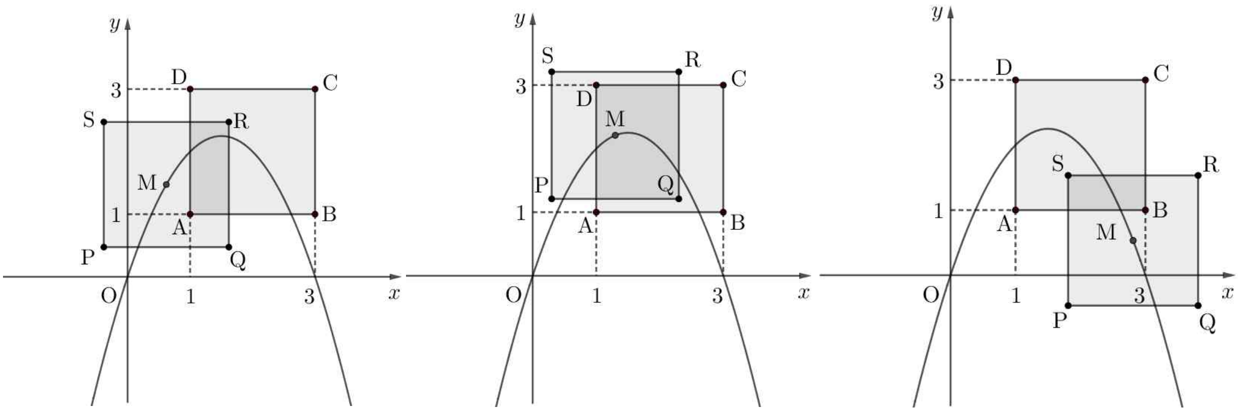
도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
수학II	박교식 외 19인	동아출판(주)	2020	83	제시문[나]	X
수학II	김원경 외 14인	㈜ 비상교육	2022	113	제시문[다]	X
수학II	홍성복 외 10인	㈜ 지학사	2021	134	제시문[라]	X
수학II	박교식 외 19인	동아출판(주)	2020	130	제시문[마]	X

5. 2023학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 II]
(1) (18점)
<9점> t의 구간에 따라 $f(t)$를 구한다.
<9점> $f(t)-g(t) \le 0$를 보이고 주어진 정적분을 계산한다.
(2) (15점)
<8점> 주어진 구간에서 $f(t)$의 성질을 이용하여 $S(a)$를 계산한다.
<7점> $S(a)$의 극소가 되는 a의 값을 계산하여 최소가 되는 점을 계산한다.

6. 2023학년도 수시모집 논술고사 예시답안

[논제 Ⅱ]
(1) $0<t<3$이면 두 정사각형이 겹치는 부분은 t의 값에 따라 다른 크기의 직사각형이 된다. 따라서 각 경우에 대하여 직사각형의 두 변의 길이를 구하면 된다.



[경우 1] [경우 2] [경우 3]

문제에서 주어진 정사각형의 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$, $\mathrm{C}(3,\ 3)$, $\mathrm{D}(1,\ 3)$이고, 중심이 $(t,\ -t^2+3t)$인 정사각형의 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{P}(t-1,\ -t^2+3t-1)$, $\mathrm{Q}(t+1,\ -t^2+3t-1)$, $\mathrm{R}(t+1,\ -t^2+3t+1)$, $\mathrm{S}(t-1,\ -t^2+3t+1)$이 된다.

[경우 1] $0<t<1$이면 겹치는 부분은 두 변의 길이가 t와 $-t^2+3t$인 직사각형이므로 넓이 $f(t)$는
$f(t)=t(-t^2+3t)=-t^3+3t^2$이다.
[경우 2] $1 \le t<2$이면 겹치는 부분은 두 변의 길이가 t와 $3-(-t^2+3t-1)$인 직사각형이므로 넓이 $f(t)$는
$f(t)=t(t^2-3t+4)=t^3-3t^2+4t$이다.
[경우 3] $2 \le t<3$이면 겹치는 부분은 두 변의 길이가 $3-(t-1)$과 $(-t^2+3t+1)-1$인 직사각형이므로 넓이 $f(t)$는
$f(t)=(-t+4)(-t^2+3t)=t^3-7t^2+12t$이다.

따라서 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases} -t^3+3t^2 & (0 \le t<1) \\ t^3-3t^2+4t & (1 \le t<2) \\ t^3-7t^2+12t & (2 \le t \le 3) \end{cases}$$

[경우 1] $0 \le t < 1$이면 $f(t) = -t^3 + 3t^2$이고 $g(t) = 2t$이므로
$f(t) - g(t) = (-t^3 + 3t^2) - 2t = -(t^3 - 3t^2 + 2t) = -t(t-1)(t-2) \le 0$이다.
[경우 2] $1 \le t < 2$이면 $f(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$이고 $g(t) = 2t$이므로
$f(t) - g(t) = (t^3 - 3t^2 + 4t) - 2t = t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2) \le 0$이다.
[경우 3] $2 \le t \le 3$이면 $f(t) = t^3 - 7t^2 + 12t$이고 $g(t) = -4t + 12$이므로
$f(t) - g(t) = (t^3 - 7t^2 + 12t) - (-4t + 12) = t^3 - 7t^2 + 16t - 12 = (t-2)^2(t-3) \le 0$이다.

모든 $0 \le t \le 3$에 대하여 $f(t) - g(t) \le 0$이므로 $\int_0^3 |f(t) - g(t)|\, dt = \int_0^3 \{g(t) - f(t)\}\, dt$가 되어
$\int_0^3 |f(t) - g(t)|\, dt = \int_0^1 (t^3 - 3t^2 + 2t)\, dt + \int_1^2 (-t^3 + 3t^2 - 2t)\, dt + \int_2^3 (-t^3 + 7t^2 - 16t + 12)\, dt$이다.
이때 $\int_0^1 (t^3 - 3t^2 + 2t)\, dt = \frac{1}{4}$, $\int_1^2 (-t^3 + 3t^2 - 2t)\, dt = \frac{1}{4}$, $\int_2^3 (-t^3 + 7t^2 - 16t + 12)\, dt = \frac{1}{12}$이다.
따라서 $\int_0^3 |f(t) - g(t)|\, dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$이다.

(2) $1 < t < 2$에서 $f'(t) = 3t^2 - 6t + 4 = 3(t-1)^2 + 1 > 0$이므로 $f'(t) > 0$이다. 그러므로 $f(t)$는 $1 \le t \le 2$에서 증가한다.
따라서 $S(a) = (a-1)f(a) - \int_1^a f(x)\, dx + \int_a^2 f(x)\, dx - (2-a)f(a) = (2a-3)f(a) - \int_1^a f(x)\, dx - \int_2^a f(x)\, dx$가 된다.
이때 $S'(a) = 2f(a) + (2a-3)f'(a) - f(a) - f(a) = (2a-3)f'(a)$이다.
한편 $1 < a < 2$에서 $f'(a) > 0$이므로 $S'(a) = 0$인 a는 $\frac{3}{2}$뿐이다. 또한 $1 < a < \frac{3}{2}$에서 $S'(a) < 0$이고 $\frac{3}{2} < a < 2$에서 $S'(a) > 0$이므로 $S(a)$는 $a = \frac{3}{2}$에서 최솟값을 갖는다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / Ⅲ문항

2. 2023학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[바] 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

[사] 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $p\,(0<p<1)$일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

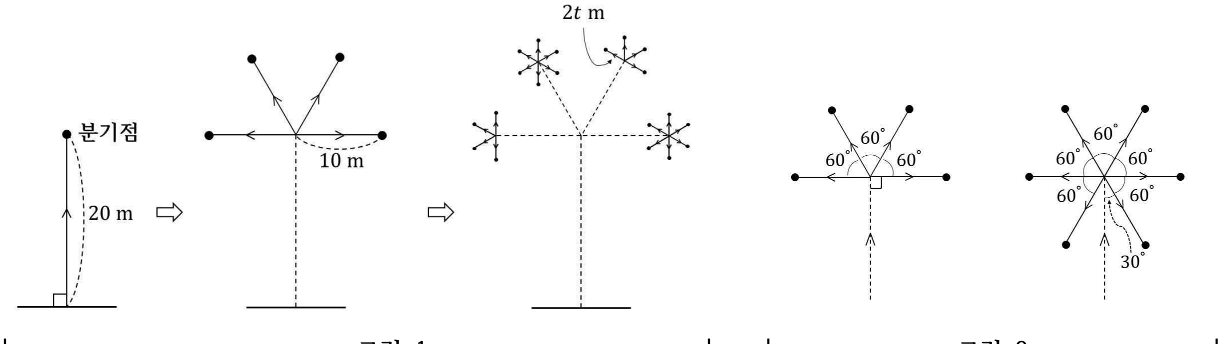
$${}_n\mathrm{C}_r\, p^r(1-p)^{n-r} \text{ (단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

[논제 Ⅲ]

어느 불꽃놀이에서 불꽃을 쏘아 올리면 불꽃이 지면에서 출발한다. 이 불꽃은 지면에서 수직 방향으로 $20\,\mathrm{m}$를 이동한 후 네 갈래 또는 여섯 갈래로 갈라지면서 이동한다. 이 갈라지는 지점을 '첫 번째 분기점'이라고 한다. 첫 번째 분기점에서 갈라진 불꽃들은 각각 $10\,\mathrm{m}$씩 이동하여 다시 네 갈래 또는 여섯 갈래로 갈라지면서 이동한다. 두 번째 갈라지는 지점을 '두 번째 분기점'이라고 한다. 두 번째 분기점들에서 갈라진 불꽃들은 각각 $2t\,\mathrm{m}$씩 이동한 후 사라진다. (단, $0<t<\frac{5}{2}$)

<그림 1>은 첫 번째 분기점에서 네 갈래로 갈라지고 두 번째 분기점에서 각각 4, 6, 4, 6 갈래로 갈라진 경우의 예시이다.

<그림 2>는 점선을 따라 이동한 불꽃이 분기점에서 네 갈래 또는 여섯 갈래로 갈라지는 모양을 나타낸 것이다. 점선의 화살표 방향을 따라 이동한 불꽃은 <그림 2>와 같은 각도로만 갈라진다.



<그림 1> <그림 2>

다음 조건을 만족할 때 아래 물음에 답하시오.

(가) 각 분기점에서 불꽃이 갈라지는 시행은 독립시행이다.

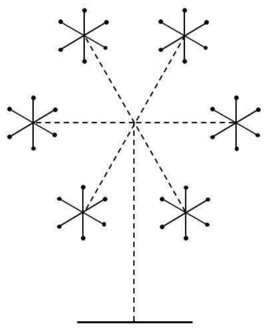
(나) 각 분기점에서 불꽃이 네 갈래로 갈라질 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(다) 불꽃은 한 평면 위에서 움직인다.

(라) 불꽃은 동일한 속력으로 움직이고, 직선으로 이동한다. (단, 분기점은 제외한다.)

(1) 두 번째 분기점에서 생기는 불꽃의 개수를 확률변수 X라고 하자. $22 \leq X \leq 26$인 사건 A가 일어났을 때, 첫 번째 분기점에서 불꽃이 여섯 갈래로 갈라진 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (18점)

(2) <그림 3>과 같이 모든 분기점에서 불꽃이 여섯 갈래로 갈라진 경우를 생각하자. 36개로 갈라진 불꽃의 마지막 위치를 점으로 나타낼 때, 이 점들 사이의 거리의 최솟값을 $f(t)$라고 하자. $0 < t < \frac{5}{2}$일 때, 함수 $y = f(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (19점)



<그림 3>

3. 2023학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제 Ⅲ]에서는 고등학교 교육과정의 조건부 확률과 사건의 독립과 종속을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2023학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 Ⅲ]에서는 조건부 확률과 사건의 독립과 종속을 이용하여 제시된 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
고등학교 확률과 통계	김원경 외 14인	㈜비상교육	2022	54	제시문 [바]	X
고등학교 확률과 통계	황선욱 외 9인	㈜미래엔	2020	65	제시문 [사]	X

5. 2023학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 Ⅲ]
(1) (18점)
<6점> 독립시행의 확률을 이용하여 처음에 네 갈래의 경우의 확률을 계산한다.
<6점> 독립시행의 확률을 이용하여 처음에 여섯 갈래의 경우의 확률을 계산한다.
<6점> 조건부확률을 계산한다.

(2) (19점)
<9점> 최소거리를 함수로 나타낸다.
<10점> 함수가 미분가능하지 않은 t 값을 구한다.

6. 2023학년도 수시모집 논술고사 예시답안

[논제 Ⅲ]

(1)

<u>$X=22$**인 경우**</u>: 첫 번째 분기점에서 네 갈래, 두 번째 분기점에서 4, 6, 6, 6 갈래로 갈라지는 경우의 확률은

$$\frac{1}{2}\times {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$$

<u>$X=24$**인 경우**</u>:

(i) 첫 번째 분기점에서 네 갈래, 두 번째 분기점에서 6, 6, 6, 6 갈래로 갈라지는 경우의 확률은

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{32}$$

(ii) 첫 번째 분기점에서 여섯 갈래, 두 번째 분기점에서 4, 4, 4, 4, 4, 4 갈래로 갈라지는 경우의 확률은

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{128}$$

<u>$X=26$**인 경우**</u>: 첫 번째 분기점에서 여섯 갈래, 두 번째 분기점에서 4, 4, 4, 4, 4, 6 갈래로 갈라지는 경우의 확률은

$$\frac{1}{2}\times {}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{3}{64}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{128}+\frac{3}{64}=\frac{7}{128}\ \text{ 이고 }\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{3}{64}=\frac{27}{128}$$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{27}$$

(2) 한 분기점에서 갈라지는 두 점 사이의 최소 거리는 $2t$이고,
서로 다른 분기점에서 갈라지는 두 점 사이의 최소 거리는 $10-2\sqrt{3}t$이다.

$2t\le 10-2\sqrt{3}t$이면 $2(\sqrt{3}+1)t\le 10$이므로 $t\le\dfrac{5}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$이다.

또한 $2t>10-2\sqrt{3}t$이면 $t>\dfrac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$이다.

$t_0=\dfrac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$라고 하면 $f(t)=\begin{cases}2t & (0<t\le t_0)\\ 10-2\sqrt{3}t & \left(t_0<t<\dfrac{5}{2}\right)\end{cases}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to t_0-}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=2$, $\displaystyle\lim_{t\to t_0+}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=-2\sqrt{3}$이므로 $f'(t_0)$가 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(t)$는 $t=t_0=\dfrac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$에서 미분가능하지 않다.