정답 및 해설

수학 영역

정답

1	④	2	①	3	⑤	4	③	5	⑤
6	②	7	④	8	③	9	③	10	②
11	①	12	①	13	④	14	③	15	⑤
16	②	17	④	18	④	19	⑤	20	②
21	③	22	2	23	6	24	24	25	10
26	20	27	74	28	191	29	5	30	311

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$2\times 16^{\frac{1}{2}}=2\times(2^4)^{\frac{1}{2}}=2\times 2^2=8$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^3+1)=2^3+1=9$

3. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$4\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$

4. [출제의도] 등차수열 계산하기

b는 두 수 4, 10의 등차중항이므로

$b=\frac{4+10}{2}=7$

공차가 3이므로 $a+3=4$, $a=1$

따라서 $a+2b=1+14=15$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 3+}f(x)=2+3=5$

6. [출제의도] 삼각함수의 관계 이해하기

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$, $\sin\theta=2\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=(2\cos\theta)^2+\cos^2\theta=5\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. [출제의도] 기호 $\sum$의 뜻과 성질 이해하기

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-1)^2=4\sum_{k=1}^{5}a_k^2-4\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}1=61$

$4\sum_{k=1}^{5}a_k^2-4\sum_{k=1}^{5}a_k=56$

$\sum_{k=1}^{5}a_k(a_k-4)=\sum_{k=1}^{5}a_k^2-4\sum_{k=1}^{5}a_k=11$

$\sum_{k=1}^{5}a_k^2=m$, $\sum_{k=1}^{5}a_k=n$이라 하면

$4m-4n=56$, $m-4n=11$이므로

$3m=45$, $m=15$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}a_k^2=15$

8. [출제의도] 삼각함수를 포함한 방정식 이해하기

$2\sin^2x+3\sin x-2=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$

$-1\le\sin x\le 1$이므로 $\sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x\le 2\pi$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 해의 합은 π

9. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_2\left(m^2+\frac{1}{4}\right)=-1$

$m^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, $m^2=\frac{1}{4}$

$m>0$이므로 $m=\frac{1}{2}$

$\log_2\frac{1}{2}=5+3\log_2 n$, $\log_2 n=-2$, $n=\frac{1}{4}$

따라서 $m+n=\frac{3}{4}$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\times 7\times\sin(\angle\mathrm{ABC})=15$

$\sin(\angle\mathrm{ABC})=\frac{5}{7}$

$0<\angle\mathrm{ABC}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos(\angle\mathrm{ABC})>0$

$\cos(\angle\mathrm{ABC})=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

11. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>1)$이라 하자.

$\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{3(r^4-1)}{r-1}}{\frac{3(r^2-1)}{r-1}}=r^2+1$

$\frac{6a_3}{a_5}=\frac{18r^2}{3r^4}=\frac{6}{r^2}$이므로

$r^2+1=\frac{6}{r^2}$, $r^4+r^2-6=0$

$(r^2-2)(r^2+3)=0$, $r^2=2$

따라서 $a_7=3\times r^6=3\times 2^3=24$

12. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$f(x)=a\tan(bx+c)$라 하자.

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}=4\pi$이므로 $b=\frac{1}{4}$

$f(x)=a\tan\left(\frac{x}{4}+c\right)=a\tan\frac{1}{4}(x+4c)$

함수 $y=f(x)$의 그래프는

함수 $y=a\tan\frac{1}{4}x$의 그래프를 x축의 방향으로

$-4c$만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로

$f(-4c)=0$

$0<c<\pi$에서 $-4\pi<-4c<0$

$f(-3\pi)=0$이므로 $-4c=-3\pi$, $c=\frac{3}{4}\pi$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$f(0)=a\tan\frac{3}{4}\pi=a\times(-1)=-3$, $a=3$

따라서 $a\times b\times c=3\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\pi=\frac{9}{16}\pi$

13. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

$a_1=2$

$a_2=2\times a_1-1=2\times 2-1=3$

$a_3=2\times a_2-1=2\times 3-1=5$

$a_4=2\times a_3-1=2\times 5-1=9$

$a_5=\frac{1}{3}\times a_4=\frac{1}{3}\times 9=3=a_2$

$a_6=a_3$

$a_7=a_4$

$\vdots$

$a_{n+3}=a_n\ (n\ge 2)$이므로

$$\sum_{k=1}^{16}a_k=a_1+(a_2+a_3+a_4)+\cdots+(a_{14}+a_{15}+a_{16})=2+(3+5+9)\times 5=87$$

14. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$n^2-15n+50=(n-5)(n-10)$

(i) n이 홀수인 경우

$f(n)=1$이므로

$f(5)=f(7)=f(9)=f(11)=1$

(ii) n이 짝수인 경우

$(n-5)(n-10)<0$이면 $f(n)=0$이므로

$f(6)=f(8)=0$

$(n-5)(n-10)=0$이면 $f(n)=1$이므로

$f(10)=1$

$(n-5)(n-10)>0$이면 $f(n)=2$이므로

$f(4)=f(12)=2$

(i), (ii)에 의해 $f(9)=f(10)=f(11)=1$

$f(n)=f(n+1)$을 만족시키는 n의 값은 9, 10

따라서 모든 n의 값의 합은 19

15. [출제의도] 기호 $\sum$의 뜻과 성질을 이용하여 문제 해결하기

원 $x^2+y^2=n$이 직선 $y=\sqrt{3}x$와 제1사분면에서 만나는 점의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면

$x_n^2+y_n^2=n$, $y_n=\sqrt{3}x_n$

$x_n^2+(\sqrt{3}x_n)^2=n$, $x_n^2=\frac{n}{4}$

$x_n>0$이므로 $x_n=\frac{\sqrt{n}}{2}$

$$\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{x_k+x_{k+1}}=\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\frac{\sqrt{k}}{2}+\frac{\sqrt{k+1}}{2}}=\sum_{k=1}^{80}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{80}\frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(k+1)-k}=2\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2(\sqrt{81}-1)=2\times 8=16$$

16. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$2^a = 3^b = c$ 에서 $a = \log_2 c$, $b = \log_3 c$

$\log_c 2 = \dfrac{1}{a}$, $\log_c 3 = \dfrac{1}{b}$

$\log_c 6 = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab}$, $\log_6 c = \dfrac{ab}{a+b}$ $\cdots$ ㉠

$a^2 + b^2 = 2ab(a+b-1) = 2ab(a+b) - 2ab$

$(a+b)^2 = 2ab(a+b)$

양변을 $2(a+b)^2$ 으로 나누면

$\dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의해 $\log_6 c = \dfrac{1}{2}$

17. [출제의도] 등차수열을 이용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$ 이므로

a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등차중항이고

수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 $a\,(a > 0)$, 공차를 $d\,(d \geq 0)$ 이라 하면

조건 (나)에서

$a_3 \times a_{22} = (a+2d)(a+21d) = a^2 + 23ad + 42d^2$

$a_7 \times a_8 + 10 = (a+6d)(a+7d) + 10$

$\qquad = a^2 + 13ad + 42d^2 + 10$

$a^2 + 23ad + 42d^2 = a^2 + 13ad + 42d^2 + 10$ 이므로

$23ad = 13ad + 10$, $10ad = 10$, $ad = 1$

조건 (가)에 의해

$a_4 + a_6 = 2a_5 = 2a + 8d$

절대부등식의 성질에 의해

$a_4 + a_6 \geq 2\sqrt{2a \times 8d} = 2\sqrt{16ad} = 2 \times 4 = 8$

(단, 등호는 $2a = 8d$ 일 때 성립)

따라서 $a_4 + a_6$ 의 최솟값은 8

[다른 풀이]

조건 (가)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$ 이므로

a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등차중항이고

수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 $d\,(d \geq 0)$ 이라 하자.

$a_4 + a_6 = 2a_5$

조건 (나)에서

$a_3 \times a_{22} = (a_5 - 2d)(a_5 + 17d)$

$a_7 \times a_8 + 10 = (a_5 + 2d)(a_5 + 3d) + 10$ 이므로

$(a_5 - 2d)(a_5 + 17d) = (a_5 + 2d)(a_5 + 3d) + 10$

${a_5}^2 + 15da_5 - 34d^2 = {a_5}^2 + 5da_5 + 6d^2 + 10$

$10da_5 = 40d^2 + 10$, $a_5 = 4d + \dfrac{1}{d}$

절대부등식의 성질에 의해

$a_4 + a_6 = 2a_5 = 8d + \dfrac{2}{d} \geq 2\sqrt{8d \times \dfrac{2}{d}} = 8$

(단, 등호는 $8d = \dfrac{2}{d}$ 일 때 성립)

따라서 $a_4 + a_6$ 의 최솟값은 8

18. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

$f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2(x-p) + q$ 라 하자.

$g(4) = 2$ 이므로 $\log_2(4-p) + q = 2$

$4 - p = 2^{2-q}$, $2^{-q} = 1 - \dfrac{p}{4}$ $\cdots$ ㉠

점 A 의 좌표는 $(1,\ 0)$

점 B 의 좌표를 $(x_1,\ 0)$ 이라 하면

$\log_2(x_1 - p) + q = 0$

$x_1 = 2^{-q} + p = \left(1 - \dfrac{p}{4}\right) + p = 1 + \dfrac{3}{4}p$

$\mathrm{B}\left(1 + \dfrac{3}{4}p,\ 0\right)$

점 C 의 좌표를 $(x_2,\ 3)$ 이라 하면

$\log_2 x_2 = 3$, $x_2 = 8$, $\mathrm{C}(8,\ 3)$

점 D 의 좌표를 $(x_3,\ 3)$ 이라 하면

$\log_2(x_3 - p) + q = 3$

$x_3 = 2^{3-q} + p = 8\left(1 - \dfrac{p}{4}\right) + p = 8 - p$

$\mathrm{D}(8-p,\ 3)$

$\overline{\mathrm{CD}} - \overline{\mathrm{BA}} = \{8 - (8-p)\} - \left\{\left(1 + \dfrac{3}{4}p\right) - 1\right\}$

$\qquad = p - \dfrac{3}{4}p = \dfrac{p}{4} = \dfrac{3}{4}$, $p = 3$

㉠에서 $2^{-q} = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4} = 2^{-2}$, $q = 2$

따라서 $p + q = 3 + 2 = 5$

19. [출제의도] 등비수열을 이용하여 문제 해결하기

조건 (가), (나)에 의해

상수 $a\,(a \neq 0)$, $r\,(r > 0)$ 에 대하여

$a_1 = a$, $a_3 = ar$, $a_5 = ar^2$, $a_7 = ar^3$

조건 (나)에 의해

$a_2 = \dfrac{75}{a_7} = \dfrac{75}{ar^3}$, $a_4 = \dfrac{75}{a_5} = \dfrac{75}{ar^2}$,

$a_6 = \dfrac{75}{a_3} = \dfrac{75}{ar}$, $a_8 = \dfrac{75}{a_1} = \dfrac{75}{a}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{8} a_k = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8)$

$\qquad = (a + ar + ar^2 + ar^3)$

$\qquad\qquad + \left(\dfrac{75}{ar^3} + \dfrac{75}{ar^2} + \dfrac{75}{ar} + \dfrac{75}{a}\right)$

$\qquad = a(1 + r + r^2 + r^3) + \dfrac{75}{ar^3}(1 + r + r^2 + r^3)$

$\qquad = (a_1 + a_2)(1 + r + r^2 + r^3)$

$a_1 + a_2 = \dfrac{10}{3}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} a_k = \dfrac{400}{3}$ 이므로

$\dfrac{10}{3}(1 + r + r^2 + r^3) = \dfrac{400}{3}$

$r^3 + r^2 + r - 39 = (r-3)(r^2 + 4r + 13) = 0$

r 는 실수이므로 $r = 3$

$a_1 + a_2 = a + \dfrac{75}{ar^3} = a + \dfrac{75}{27a} = \dfrac{10}{3}$

$9a^2 - 30a + 25 = (3a-5)^2 = 0$, $a = \dfrac{5}{3}$

따라서 $a_3 + a_8 = ar + \dfrac{75}{a} = 5 + 45 = 50$

[참고]

$a_1 = \dfrac{5}{3}$, $a_2 = \dfrac{5}{3}$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5$, $a_5 = 15$,

$a_6 = 15$, $a_7 = 45$, $a_8 = 45$

20. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

ㄱ. $f(1) = (1-k)^2 = 1$ 이고 $k > 0$ 이므로 $k = 2$

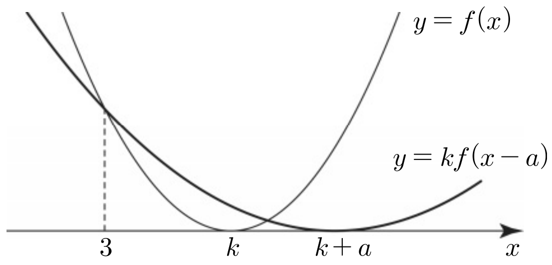
$f(x) = (x-2)^2$

$x \leq 3$ 에서 $g(x) = f(x)$ 이므로 $g(2) = 0$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 $x = 3$ 을 경계로 두 함수 $f(x)$ 와 $kf(x-a)$ 로 정의되므로 이차함수 $f(x) = (x-k)^2$ 에 대하여 $k > 3$, $k = 3$, $k < 3$ 인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $k > 3$ 인 경우 $\cdots$ ㉠

이차함수 $y = kf(x-a)$의 그래프의 꼭짓점 $(k+a,\ 0)$ 은 점 $(k,\ 0)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 점과 일치하고 $k + a > 3$ 이므로 조건 (가)를 만족시키는 두 이차함수 $y = f(x)$ 와 $y = kf(x-a)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = k$ 에 대하여 대칭이고, 이차함수 $y = kf(x-a)$ 의 그래프는 직선 $x = k + a$ 에 대하여 대칭이다.

$f(3) = kf(3-a)$,

$f(k) = kf(k+a-a) = 0$ 이므로

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 폭이

이차함수 $y = kf(x-a)$ 의 그래프의 폭보다 좁다.

두 이차함수 $y = f(x)$ 와 $y = kf(x-a)$ 의 이차항의 계수는 각각 1 과 k 이므로

$k < 1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 k 는 존재하지 않는다.

(ii) $k = 3$ 인 경우

$\displaystyle\lim_{x \to 3-} g(x) = \lim_{x \to 3-} f(x) = (3-3)^2 = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to 3+} g(x) = \lim_{x \to 3+} \{3f(x-a)\}$

$\displaystyle\qquad = \lim_{x \to 3+} 3(x-a-3)^2 = 3a^2 > 0$

$\displaystyle\lim_{x \to 3-} g(x) \neq \lim_{x \to 3+} g(x)$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $k < 3$ 인 경우는 $k + a$ 의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

① $k < 3$, $k + a > 3$ 인 경우

$g(k) = f(k) = 0$,

$g(k+a) = kf(k+a-a) = kf(k) = 0$,

$g(k) = g(k+a) = 0$ 이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나게 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $k < 3$, $k + a = 3$ 인 경우

$\displaystyle\lim_{x \to 3-} g(x) = \lim_{x \to 3-} f(x) = (3-k)^2 > 0$

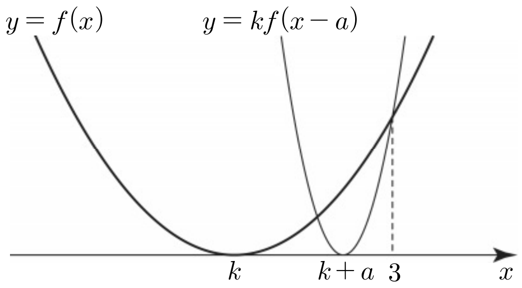
$\displaystyle\lim_{x \to 3+} g(x) = \lim_{x \to 3+} \{kf(x-a)\}$

$\displaystyle\qquad = \lim_{x \to 3+} k(x-a-k)^2$

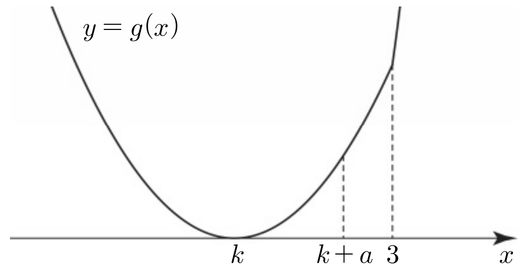
$\displaystyle\qquad = \lim_{x \to 3+} k(x-3)^2 = 0$

$\lim\limits_{x \to 3-} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 3+} g(x)$ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $k < 3$, $k < k+a < 3$ 인 경우
조건 (가), (나)를 만족시키는 두 이차함수 $y=f(x)$ 와 $y=kf(x-a)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

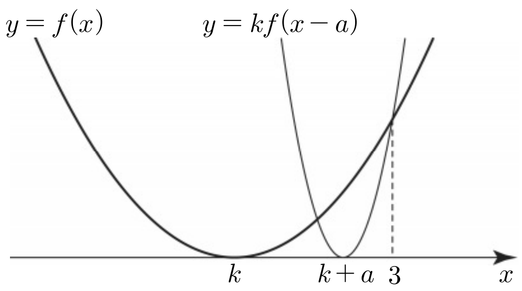


(ⅰ)~(ⅲ)에 의해
$k < 3$, $k < k+a < 3$ 이고
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $g(k+a)=f(k+a)<f(3)=g(3)$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의해 $k<3$ 이고 … ㉢
두 이차함수 $y=f(x)$ 와 $y=kf(x-a)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=k$ 에 대하여 대칭이고, 이차함수 $y=kf(x-a)$ 의 그래프는 직선 $x=k+a$ 에 대하여 대칭이다.
$f(k)=kf(k+a-a)=0$,
$f(3)=kf(3-a)$ 이므로
이차함수 $y=kf(x-a)$ 의 그래프의 폭이 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 폭보다 좁다.
두 이차함수 $y=f(x)$ 와 $y=kf(x-a)$ 의 이차항의 계수는 각각 1 과 k 이므로
$k>1$ … ㉣
㉢, ㉣에 의해 $1<k<3$

(반례) $k=\dfrac{3}{2}$ 이면,

$$\lim_{x \to 3-} g(x)=\lim_{x \to 3-} f(x)=\left(3-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$\lim_{x \to 3+} g(x)=\lim_{x \to 3+}\left\{\frac{3}{2}f(x-a)\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\left(3-a-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-a\right)^2$$

$\lim\limits_{x \to 3-} g(x)=\lim\limits_{x \to 3+} g(x)$ 이므로

$$\frac{9}{4}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-a\right)^2$$

$k<k+a<3$ 에서 $0<a<\dfrac{3}{2}$ 이므로

$$a=\frac{3-\sqrt{6}}{2}$$

이때 함수

$$g(x)=\begin{cases} \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 & (x \le 3) \\ \dfrac{3}{2}\left(x-3+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 & (x>3) \end{cases}$$

은 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.
그러나 $(k-1)(k-2)=-\dfrac{1}{4}<0$ (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

> [참고]
> $\lim\limits_{x \to 3-} g(x)=\lim\limits_{x \to 3-}(x-k)^2=(3-k)^2$
> $\lim\limits_{x \to 3+} g(x)=\lim\limits_{x \to 3+}\{kf(x-a)\}=k(3-a-k)^2$
> $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ 의 값이 존재하므로
> $k(3-a-k)^2=(3-k)^2$
> $k<k+a<3$ 이므로 $k=\left(\dfrac{3-k}{3-a-k}\right)^2$
> $\sqrt{k}=\dfrac{3-k}{3-a-k}$ 이고 $a=3+\sqrt{k}-k-\dfrac{3}{\sqrt{k}}$

21. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

조건 (가)에서 $a_{21}=(-1)^{20}\times a_{20}=a_{20}$
$a_{20}+a_{21}=0$ 이므로 $a_{20}=a_{21}=0$
조건 (나)에 의해
$a_{21}=-a_{18}-18=0$
$a_{18}=-18=-a_{15}-15$
$a_{15}=3=-a_{12}-12$
$a_{12}=-15=-a_9-9$
$a_9=6=-a_6-6$
$a_6=-12=-a_3-3$
$a_3=9$
n 이 3 의 배수가 아니면서 짝수이면
$n=6k+2$, $n=6k+4$ ($k=0$, 1, 2, ⋯)
조건 (가)에 의해
$a_{6k+3}=(-1)^{6k+2}\times a_{6k+2}=a_{6k+2}$
$a_{6k+5}=(-1)^{6k+4}\times a_{6k+4}=a_{6k+4}$
n 이 3 의 배수가 아니면서 홀수이면
$n=6k+1$, $n=6k+5$ ($k=0$, 1, 2, ⋯)
조건 (가)에 의해
$a_{6k+2}=(-1)^{6k+1}\times a_{6k+1}=-a_{6k+1}$
$a_{6k+6}=(-1)^{6k+5}\times a_{6k+5}=-a_{6k+5}$

$$a_{6k+1}+a_{6k+2}+a_{6k+3}+a_{6k+4}+a_{6k+5}+a_{6k+6}$$
$$=a_{6k+1}-a_{6k+1}+a_{6k+3}+a_{6k+4}+a_{6k+5}-a_{6k+5}$$
$$=a_{6k+3}+a_{6k+4}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면
$S_6=a_3+a_4$
$S_{6k+6}-S_{6k}=a_{6k+3}+a_{6k+4}$ ($k=1$, 2, 3, ⋯)

$$S_{18}=(S_{18}-S_{12})+(S_{12}-S_6)+S_6$$
$$=(a_{15}+a_{16})+(a_9+a_{10})+(a_3+a_4)$$

조건 (가)에 의해
$a_{18}=-a_{17}=-a_{16}=-18$, $a_{16}=18$
$a_{12}=-a_{11}=-a_{10}=-15$, $a_{10}=15$
$a_6=-a_5=-a_4=-12$, $a_4=12$
따라서 $S_{18}=63$

> [참고]
> $\{a_n\}$: -9, 9, 9, 12, 12, -12, -6, 6, 6, 15, 15, -15, -3, 3, 3, 18, 18, -18, ⋯

22. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 8+\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2\left(8\times\dfrac{1}{2}\right)=\log_2 4=2$

23. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}rl=\dfrac{1}{2}\times r\times 2\pi=6\pi$
따라서 $r=6$

24. [출제의도] 로그함수 이해하기

함수 $y=6\log_3(x+2)$ 는
x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로
$x=1$ 일 때, 최솟값 $m=6\log_3(1+2)=6$
$x=25$ 일 때, 최댓값 $M=6\log_3(25+2)=18$
따라서 $M+m=18+6=24$

25. [출제의도] 지수가 포함된 방정식 이해하기

$(3^x)^2-30\times 3^x+81=0$
$(3^x-27)(3^x-3)=0$, $3^x=3^3$ 또는 $3^x=3$
$x=3$ 또는 $x=1$
$\alpha=1$, $\beta=3$ 또는 $\alpha=3$, $\beta=1$
따라서 $\alpha^2+\beta^2=10$

26. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질 이해하기

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 x^2 의 계수를 각각 a, b $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ 이라 하자.
$\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{f(x)}{g(x)-x^2}=1$ 이므로
두 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)-x^2$ 의 차수는 2 이고
$\dfrac{a}{b-1}=1$, $a=b-1$, $b-a=1$ 이므로
$g(x)-f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수이다.
$\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{g(x)-f(x)}{x-3}$ 의 값이 존재하므로
다항식 $g(x)-f(x)$ 는 $x-3$ 을 인수로 갖는다.
$g(x)-f(x)=(x-3)(x+k)$ (k 는 실수)

$$\lim_{x \to 3}\frac{g(x)-f(x)}{x-3}=\lim_{x \to 3}\frac{(x-3)(x+k)}{x-3}$$
$$=\lim_{x \to 3}(x+k)=3+k=8$$

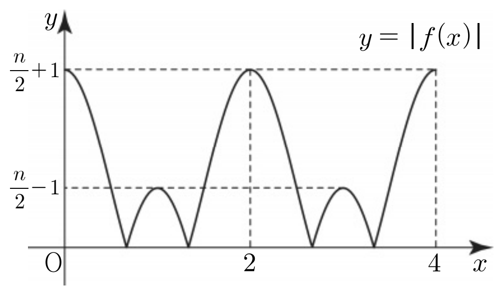
$k=5$ 이므로 $g(x)-f(x)=(x-3)(x+5)$
따라서 $g(5)-f(5)=20$

27. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

함수 $y=\dfrac{n}{2}\cos\pi x+1$ 의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$
함수 $f(x)=\dfrac{n}{2}\cos\pi x+1$ $(0\le x\le 4)$ 는

최댓값 $\frac{n}{2}+1$, 최솟값 $-\frac{n}{2}+1$ 을 갖는다.

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

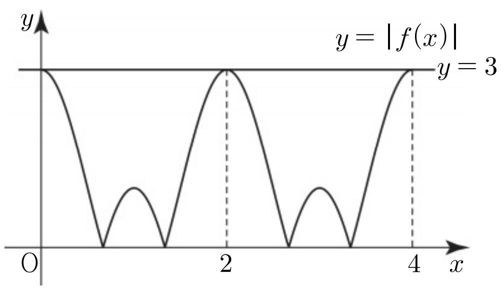


$g(n)$ 은 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y=3$ 과 만나는 서로 다른 모든 점의 x 좌표의 합과 같다.

$n \geq 4$ 일 때, $\frac{n}{2}+1 \geq 3$

$\frac{n}{2}+1$ 은 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값이므로 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y=3$ 과 만나는 서로 다른 모든 점의 x 좌표의 합은 다음과 같다.

(i) $\frac{n}{2}+1=3$ $(n=4)$ 인 경우

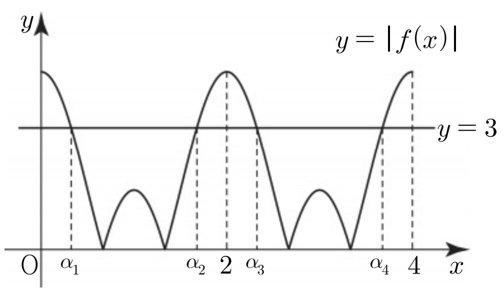


함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y=3$ 과 만나는 점의 x 좌표를 α_1 , α_2 , α_3 이라 하면

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0+2+4=6$

$n=4$ 일 때, $g(4)=6$

(ii) $\frac{n}{2}-1<3<\frac{n}{2}+1$ $(n=5,\ 6,\ 7)$ 인 경우



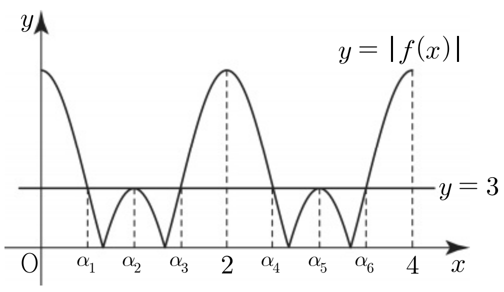
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y=3$ 과 만나는 점의 x 좌표를 α_1 , α_2 , α_3 , α_4 라 하면

$\alpha_2=2-\alpha_1$, $\alpha_3=2+\alpha_1$, $\alpha_4=4-\alpha_1$

이므로 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=8$

$n=5,\ 6,\ 7$ 일 때, $g(n)=8$

(iii) $\frac{n}{2}-1=3$ $(n=8)$ 인 경우



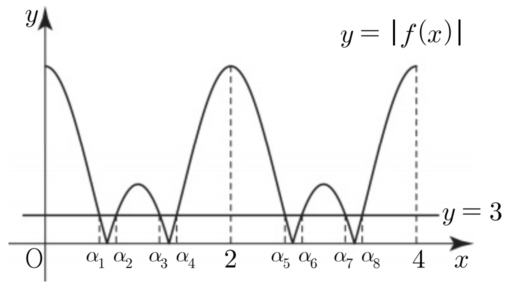
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y=3$ 과 만나는 점의 x 좌표를 α_1 , α_2 , α_3 , $\cdots$, α_6 이라 하면 $\alpha_2=1$, $\alpha_3=2-\alpha_1$, $\alpha_4=2+\alpha_1$,

$\alpha_5=3$, $\alpha_6=4-\alpha_1$

이므로 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=12$

$n=8$ 일 때, $g(8)=12$

(iv) $\frac{n}{2}-1>3$ $(n \geq 9)$ 인 경우



함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y=3$ 과 만나는 점의 x 좌표를 α_1 , α_2 , α_3 , $\cdots$, α_8 이라 하면 $\alpha_3=2-\alpha_2$, $\alpha_4=2-\alpha_1$, $\alpha_5=2+\alpha_1$, $\alpha_6=2+\alpha_2$, $\alpha_7=4-\alpha_2$, $\alpha_8=4-\alpha_1$

이므로 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ \cdots\ +\alpha_8=16$

$n \geq 9$ 일 때, $g(n)=16$

(i)~(iv)에 의해

$$g(n)=\begin{cases} 6 & (n=4) \\ 8 & (n=5,\ 6,\ 7) \\ 12 & (n=8) \\ 16 & (n \geq 9) \end{cases}$$

따라서

$\sum_{n=4}^{10} g(n)=6+8+8+8+12+16+16=74$

28. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{CD}}=a$ 라 하면 $\overline{\mathrm{CE}}=5\sqrt{3}-a$

$\angle\mathrm{BAC}$, $\angle\mathrm{BEC}$ 는 호 BC 에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BEC}$

$\cos(\angle\mathrm{BAC})=\cos(\angle\mathrm{BEC})=\frac{\sqrt{3}}{6}$ $\cdots$ ㉠

삼각형 ECD 에서 코사인법칙에 의해

$a^2=5^2+(5\sqrt{3}-a)^2-2\times5\times(5\sqrt{3}-a)\times\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\frac{25\sqrt{3}}{3}a=75$, $a=3\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{CD}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CE}}=2\sqrt{3}$

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CED}$, $\angle\mathrm{BDA}=\angle\mathrm{CDE}$ 이므로 두 삼각형 ABD , ECD 는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$

$2:2\sqrt{3}=\overline{\mathrm{BD}}:3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BD}}=3$

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{DE}}=8$

삼각형 EBC 에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{BC}}^2=8^2+(2\sqrt{3})^2-2\times8\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{6}=60$

$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{15}$

㉠에 의해

$\sin(\angle\mathrm{BAC})=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{6}$

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의해

$2R=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BAC})}=2\sqrt{15}\times\frac{6}{\sqrt{33}}$

$R=\frac{6\sqrt{55}}{11}$

삼각형 ABC 의 외접원의 넓이는 $\pi R^2=\frac{180}{11}\pi$

따라서 $p+q=11+180=191$

29. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의해 실수 a_k (k 는 자연수)는 x 에 대한 방정식 $x^2+3x+(8-k)(k-5)=0$ 의 근이므로

$(a_k+8-k)(a_k+k-5)=0$

$a_k=k-8$ 또는 $a_k=5-k$

조건 (나)에서 $a_n \times a_{n+1} \leq 0$ 을 만족시키는 10 이하의 두 자연수 n 을 각각 p , q $(p<q)$ 라 하자.

$a_6=-2$ 또는 $a_6=-1$,

$a_7=-1$ 또는 $a_7=-2$ 이므로

$\sum_{n=6}^{7} a_n$ 의 값이 최대가 되는 것은

$a_6=a_7=-1$ 일 때이고 $\sum_{n=6}^{7} a_n=-2$

$a_5=-3$ 또는 $a_5=0$,

$a_8=0$ 또는 $a_8=-3$ 이므로

a_5 , a_8 의 값에 따라 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 최댓값은 다음과 같다.

(i) $a_5=a_8=0$ 이면

$a_4a_5=a_5a_6=a_7a_8=a_8a_9=0$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a_5=0$, $a_8=-3$ 인 경우

$a_4a_5=a_5a_6=0$ 이므로 $p=4$, $q=5$

$6 \leq n \leq 10$ 에서 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$a_8=-3<0$ 이므로 $a_9=-4$, $a_{10}=-5$

$1 \leq n \leq 4$ 에서 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$a_1=4$ 또는 $a_1=-7$ 이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 것은

$a_1=4$, $a_2=3$, $a_3=2$, $a_4=1$ 일 때이다.

$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{4} a_n+a_5+\sum_{n=6}^{7} a_n+a_8+\sum_{n=9}^{10} a_n$

$=10+0+(-2)+(-3)+(-9)=-4$

(iii) $a_5=-3$, $a_8=0$ 인 경우

$a_7a_8=a_8a_9=0$ 이므로 $p=7$, $q=8$

$1 \leq n \leq 5$ 에서 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$a_5=-3<0$ 이므로

$a_1=-7$, $a_2=-6$, $a_3=-5$, $a_4=-4$

$9 \leq n \leq 10$ 에서 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$a_9=1$ 또는 $a_9=-4$ 이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 것은

$a_9=1$, $a_{10}=2$ 일 때이다.

$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{4} a_n+a_5+\sum_{n=6}^{7} a_n+a_8+\sum_{n=9}^{10} a_n$

$=(-22)+(-3)+(-2)+0+3=-24$

(iv) $a_5=-3$, $a_8=-3$ 인 경우

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 경우는

$1 \le n \le 4$ 에서 $a_n > 0$ 이고

$9 \le n \le 10$ 에서 $a_n > 0$ 일 때이다.

이때 $a_4 a_5 < 0$, $a_8 a_9 < 0$ 이므로 $p=4$, $q=8$

$a_1=4$, $a_2=3$, $a_3=2$, $a_4=1$, $a_9=1$, $a_{10}=2$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{4} a_n + a_5 + \sum_{n=6}^{7} a_n + a_8 + \sum_{n=9}^{10} a_n$$
$$= 10+(-3)+(-2)+(-3)+3=5$$

(i)~(iv)에 의해 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 최댓값은 5

[참고]

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지는 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n-8$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$5-n$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

$\{a_n\}$: 4, 3, 2, 1, -3, -1, -1, -3, 1, 2, $\cdots$

30. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 추론하기

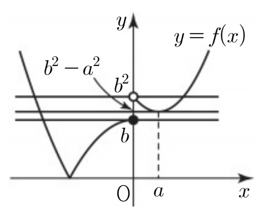
$\lim_{x\to 0-} f(x)=|b|=b$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=b^2$

$x>0$ 에서 $f(x)=(x-a)^2+b^2-a^2$

$0<a<b$ 이므로 $0<b^2-a^2<b^2$

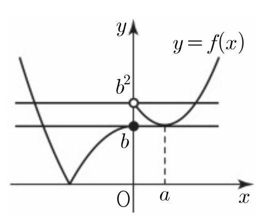
세 실수 b, b^2, b^2-a^2 의 대소 관계에 따라 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형과 함수 $g(t)$ 의 함숫값은 다음과 같다.

(i) $b<b^2-a^2<b^2$



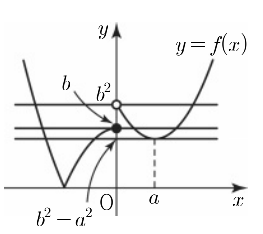
$g(t)$	t 의 범위
2	$(t>b^2)$
2	$(t=b^2)$
3	$(b^2-a^2<t<b^2)$
2	$(t=b^2-a^2)$
1	$(b<t<b^2-a^2)$
2	$(t=b)$
2	$(0<t<b)$

(ii) $b=b^2-a^2<b^2$



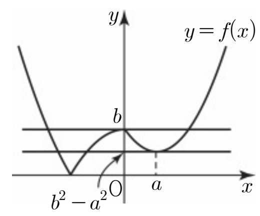
$g(t)$	t 의 범위
2	$(t>b^2)$
2	$(t=b^2)$
3	$(b<t<b^2)$
3	$(t=b)$
2	$(0<t<b)$

(iii) $b^2-a^2<b<b^2$



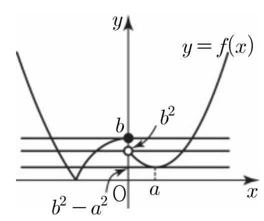
$g(t)$	t 의 범위
2	$(t>b^2)$
2	$(t=b^2)$
3	$(b<t<b^2)$
4	$(t=b)$
4	$(b^2-a^2<t<b)$
3	$(t=b^2-a^2)$
2	$(0<t<b^2-a^2)$

(iv) $b^2-a^2<b=b^2$ $(b=1)$



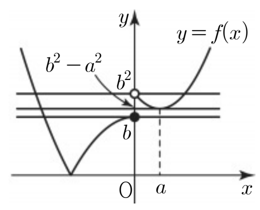
$g(t)$	t 의 범위
2	$(t>b)$
3	$(t=b)$
4	$(b^2-a^2<t<b)$
3	$(t=b^2-a^2)$
2	$(0<t<b^2-a^2)$

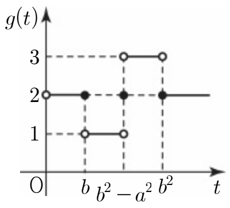
(v) $b^2-a^2<b^2<b$



$g(t)$	t 의 범위
2	$(t>b)$
3	$(t=b)$
3	$(b^2<t<b)$
3	$(t=b^2)$
4	$(b^2-a^2<t<b^2)$
3	$(t=b^2-a^2)$
2	$(0<t<b^2-a^2)$

(i) $b>1$, $b^2-a^2>b$ 인 경우 $(b^2>b)$

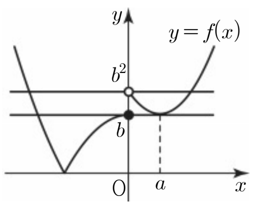


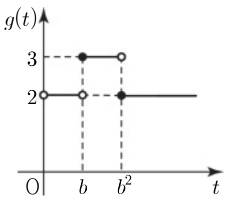


$b<t<b^2-a^2$ 에서 $g(t)=1$ 이므로

함수 $g(t)$ 의 최솟값이 2 임을 만족시키지 않는다.

(ii) $b>1$, $b^2-a^2=b$ 인 경우 $(b^2>b)$



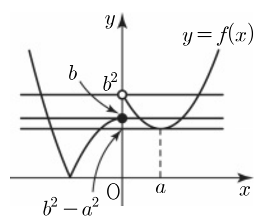


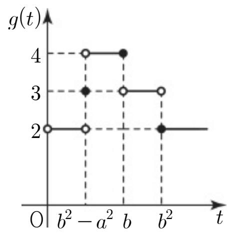
$\left|\lim_{t\to\alpha-} g(t)-\lim_{t\to\alpha+} g(t)\right|=2$ 를 만족시키는

실수 α 가 존재하지 않으므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $b>1$, $b^2-a^2<b$ 인 경우 $(b^2>b)$





조건 (가)를 만족시키는 $\alpha=b^2-a^2$

$\lim_{t\to b^2-} g(t)-\lim_{t\to b^2+} g(t)+1=3-2+1=2$,

$g(b^2)=2$

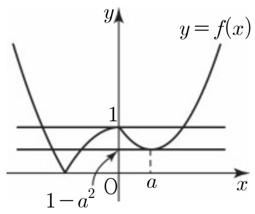
$\lim_{t\to b^2-} g(t)-\lim_{t\to b^2+} g(t)+1=g(b^2)$ 이므로

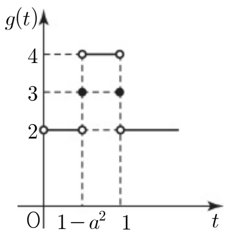
조건 (나)를 만족시키는 $\beta=b^2$

$g(\alpha)=3$, $g(\beta)=2$ 이므로

조건 (다)를 만족시킨다.

(iv) $b=1$ 인 경우 $(b^2=b=1)$





조건 (가)를 만족시키는 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=1-a^2$

$\lim_{t\to 1-} g(t)-\lim_{t\to 1+} g(t)+1=4-2+1=3$,

$g(1)=3$

$\lim_{t\to 1-} g(t)-\lim_{t\to 1+} g(t)+1=g(1)$ 이므로

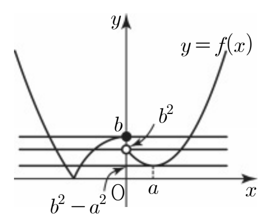
조건 (나)를 만족시키는 $\beta=1$

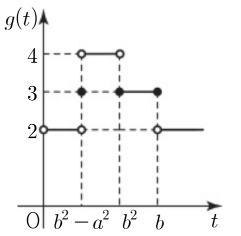
$g(1)=g(1-a^2)=3$ 이므로

$g(\alpha)=g(\beta)=3$

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(v) $0<b<1$ 인 경우 $(b^2<b)$





조건 (가)를 만족시키는 $\alpha=b^2-a^2$

$\lim_{t\to\beta-} g(t)-\lim_{t\to\beta+} g(t)+1=g(\beta)$ 를 만족시키는

실수 β 가 존재하지 않으므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에 의해

$b>1$, $b^2-a^2<b$ 이다.

$f(a)=b^2-a^2=\alpha$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha$ 이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(a)$, $a=\frac{1}{2}$

$\alpha=b^2-\frac{1}{4}$

$\alpha+24\beta=b^2-\frac{1}{4}+24\times b^2=30$, $b^2=\frac{121}{100}$

$b>1$ 이므로 $b=\frac{11}{10}$

$$f(x)=\begin{cases} \left|-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{10}\right| & (x\le 0) \\ x^2-x+\frac{121}{100} & (x>0) \end{cases}$$

$$f(-2)+f(1)=\left|-2+\frac{11}{10}\right|+\frac{121}{100}$$
$$=\frac{9}{10}+\frac{121}{100}=\frac{211}{100}$$

따라서 $p+q=100+211=311$