〈오전〉

2023학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

이공계를 전공하기 위해 필수적으로 알아야 할 고등학교 수학 교과과정의 내용을 확인하는 문항들로 구성하였다. 이를 해결하기 위해서는 문항의 내용을 수식화하고 원하는 답을 얻기 위해 관련된 기본 개념을 활용할 수 있어야 한다. 특히 등비급수, 접선의 방정식, 무리함수 및 삼각함수의 미분, 부분적분, 삼각함수 공식, 함수로 표현되는 도형의 부피와 그 부피의 단면인 도형의 넓이의 관계들을 잘 알고 적용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 무리함수의 미분을 이용하여 수열의 점화식을 얻을 수 있는지 평가한다. 또 등비급수를 이용하여 수렴하는 급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

[1.2] 주어진 구간에서 함수가 극값을 갖는 조건을 활용할 수 있는지와 삼각함수의 미분, 삼각함수의 합의 공식을 맞게 적용할 수 있는지 평가한다.

[1.3] 적분을 활용하여 주어진 조건으로부터 단면의 넓이와 부피를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 이므로 점 $\mathrm{P}_n(a_n, b_n)$에서의 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2\sqrt{a_n}}(x - a_n) + b_n = \frac{1}{2\sqrt{a_n}}x + \frac{\sqrt{a_n}}{2}$$

이다. 접선의 y절편 $b_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a_n}}{2}$ 이고 $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}}$ 이므로, $\sqrt{a_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{a_n}}{2}$ 즉, $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n$

이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로, 급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$$

이다.

[1.2] 함수 $f(x)$를 미분하면

$$f'(x) = \frac{\cos x(\cos x - 1) - (\sin x + 3)(-\sin x)}{(\cos x - 1)^2} = \frac{1 - \cos x + 3\sin x}{(\cos x - 1)^2}$$

이므로 $f'(x) = 0$에서 $\cos x - 1 = 3\sin x$의 양변을 제곱하여 정리하면

$$10\cos^2 x - 2\cos x - 8 = 2(5\cos x + 4)(\cos x - 1) = 0$$

이다. $\cos x \neq 1$이므로 $f'(\alpha) = 0$에서 $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$이다.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{25}, \ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$$

이므로

$$\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{31}{50}\sqrt{2}$$

이다.

[1.3] 삼각형 PQR에서 코사인 법칙에 의하여

$$\cos(\angle \mathrm{PQR}) = \frac{\overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{QR}}^2 - \overline{\mathrm{RP}}^2}{2\overline{\mathrm{PQ}} \cdot \overline{\mathrm{QR}}} = \frac{1}{5}$$

이고

$$\sin(\angle \mathrm{PQR}) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle \mathrm{PQR})} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

이다. 주어진 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}} \cdot \overline{\mathrm{QR}} \cdot \sin(\angle \mathrm{PQR}) = 24\sqrt{6}\,xe^{2x}$$

이다. 따라서 입체도형의 부피는

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 24\sqrt{6}\,xe^{2x}dx = 24\sqrt{6}\left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 6\sqrt{6}\,e^2$$

이다.

3. 출제근거

「무리함수」, 『고등학교 수학』, 지학사, 2021, 243-249쪽.
「사인법칙과 코사인법칙」, 『고등학교 수학 I』, 비상교육, 2021, 94-107쪽.
「삼각형의 넓이」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2021, 98-100쪽.
「등비수열」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2021, 123-127쪽.
「등비수열의 합」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 32-36쪽.
「지수함수와 로그함수의 극한」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 49-51쪽.
「삼각함수의 덧셈정리」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 58-64쪽.
「사인함수와 코사인함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 70-71쪽.
「함수의 몫의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 76-79쪽.
「함수의 그래프」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 102-108쪽.
「부분적분법」, 『고등학교 미적분』, 비상교육, 2020, 121-133쪽.
「부피」, 『고등학교 미적분』, 교학사, 2021, 176-178쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

주어진 문제들을 파악하고 그 의미를 깊이 이해하는 데 있어 이를 수학적으로 기술하고 해석하는 능력은 이공계 전공 공부에서 중요한 요소이다. 예를 들어 빛을 다루는 광학의 경우, 삼각함수, 지수함수, 미적분 등의 수학적 지식을 이용하여 간섭, 회절 등의 빛의 현상과 레이저, LED 조명 등 광원의 특성을 기술할 수 있다. 특히, 레이저 빛의 경우 복잡한 빔의 형상을 가우스 함수로 근사함으로써 빔이 갖는 여러 광학 현상들을 간단히 다룰 수 있다. 최근 주목받고 있는 양자점, OLED, 입체 디스플레이 등의 여러 기술은 수학 함수와 모형화를 통해 그 결괏값을 예측하고 이를 실제 기술 발전에 활용할 수 있다. 본 문제에서는 램프에서 나오는 빔이 움직이는 불투명 원판에 비칠 때의 상황을 간단한 미적분과 원의 방정식, 두 원의 관계 등을 이용해서 파악할 수 있는지 평가하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

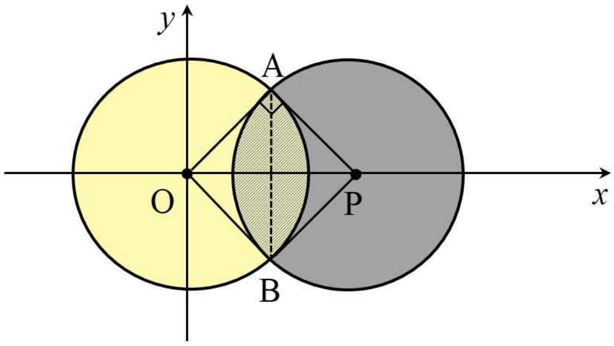
[2.1] 속도의 개념을 알고 적분을 통해 위치 함수를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 두 원의 중심이 주어진 거리만큼 떨어졌을 때, 부채꼴, 원 및 삼각형의 넓이를 올바르게 활용하는지 평가한다.
[2.3] 주어진 시간에서 두 원의 관계를 이해하고 이를 통해 부채꼴, 원 및 삼각형의 넓이를 올바르게 활용하는지 평가한다.
[2.4] 앞에서 구한 위치를 바탕으로 질문에 답할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] $v(t)$를 적분하여 $f(t)$를 구하면 다음과 같다.

$$x = f(t) = \begin{cases} 7-t^2 & (0 \le t < 2) \\ t^2-8t+15 & (2 \le t < 6) \\ -t^2+16t-57 & (6 \le t \le 8) \end{cases}$$

[2.2] 점 P의 위치가 $x = 2\sqrt{2}$일 때 빔과 원판의 위치는 다음 그림과 같다.



위 그림에서 $\angle \mathrm{AOP} = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{2}$이므로 빔이 원판에 비친 부분의 넓이는

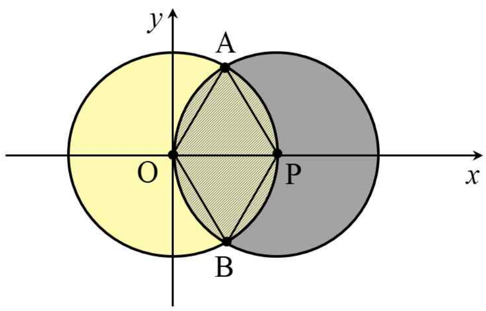
$$2\left(\frac{1}{2}\times 2^2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\times 2^2\right) = 2\pi - 4$$

이다.

[2.3] $t = 4-\sqrt{3}$일 때 점 P의 위치는

$$f(4-\sqrt{3}) = (4-\sqrt{3})^2 - 8(4-\sqrt{3}) + 15 = 2$$

이므로 빔과 원판의 위치는 다음 그림과 같다.



위 그림에서 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{AP}} = 2$이므로 $\angle \mathrm{AOP} = \dfrac{\pi}{3}$이다. 따라서 빔이 원판에 비친 부분의 넓이는

$$4\times\frac{1}{2}\times 2^2 \times \frac{\pi}{3} - 2\times\frac{1}{2}\times 2^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

이다.

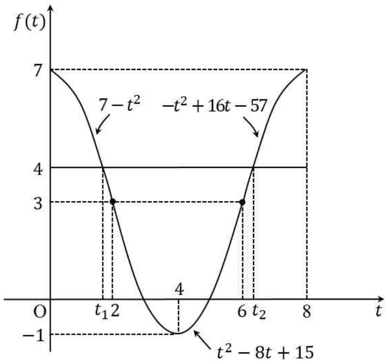
[2.4] $-4 \le f(t) \le 4$일 때, 원판이 빔에 닿거나 비추어진다. $f(t)=4$의 해를 $t_1, t_2\,(t_1 < t_2)$라 하면

$$7-t_1^2=4,\quad -t_2^2+16t_2-57=4$$

이므로 $t_1=\sqrt{3}$, $t_2=8-\sqrt{3}$이다. 따라서 센서에서 소리가 나는 시각 t의 범위는

$$\sqrt{3} \le t \le 8-\sqrt{3}$$

이다.



3. 출제근거

「속도와 가속도」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 122−133쪽.
「속도와 가속도」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 125−134쪽.
「속도와 가속도」, 『고등학교 수학 II』, 동아출판, 2020, 90−106쪽.
「속도와 가속도」, 『고등학교 수학 II』, 비상교육, 2020, 93−98쪽.
「여러 가지 함수의 부정적분과 정적분」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 139−146쪽.
「여러 가지 함수의 부정적분」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 139−143쪽.
「정적분」, 『고등학교 수학 II』, 동아출판, 2020, 123−125쪽.
「속도와 거리」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 170−171쪽.
「원의 방정식」, 『고등학교 수학』, 천재교육, 2021, 140−153쪽.
「일반각과 호도법」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2020, 65−69쪽.
「삼각형의 넓이」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2020, 98−100쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

함수의 미분을 통해 주어진 자료를 설명하는 함수에 대한 여러 정보를 알아낼 수 있다. 원하는 정보를 얻기 위해 함수의 도함수를 이용하는 능력을 평가하고자 한다. 이를 위하여 고등학교 수학에서 배우는 미분 가능성, 도함수의 활용, 정적분 등 다양한 개념들을 알고 있는지 확인하는 문항들로 구성하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 함수의 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하고 함수의 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 도함수를 활용하여 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 여러 가지 함수의 적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로,

$$\lim_{x\to 1-}\{a\ln x+6\}=\lim_{x\to 1+}\{bx+12\}$$

로부터 $b=-6$이다. 또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(a\ln x+6)-6}{x-1}=\lim_{t\to 0-}\frac{a\ln(1+t)}{t}=a\ln\left\{\lim_{t\to 0-}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}=a$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(-6x+12)-6}{x-1}=-6$$

로부터 $a=-6$이다.

[3.2] 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정의하자.

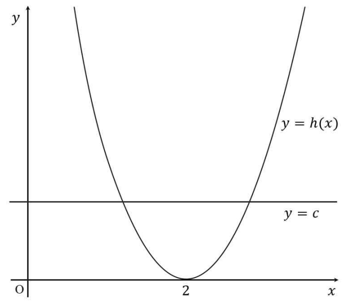
$$h(x)=f(x)-g(x)+c=\begin{cases}-6\ln x+3x^2-6x+6 & (0<x\le 1)\\ 3x^2-12x+12 & (x>1)\end{cases}$$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 방정식 $h(x)=c$의 해와 같다.

$$h'(x)=\begin{cases}-\dfrac{6}{x}+6x-6 & (0<x\le 1)\\ 6x-12 & (x>1)\end{cases}$$

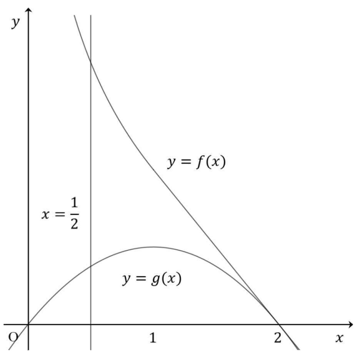
이므로 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 2이다. 또 $\lim_{x\to 0+}h(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 이를 이용하여 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 $c<0$일 때 0, $c=0$일 때 1, $c>0$일 때 2이다.

[3.3] 방정식 $f(x)=g(x)$가 $c=0$일 때 1개의 실근을 가지므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x=\dfrac{1}{2}$로 둘러싸인 도형은 아래 그림과 같다.



두 곡선은 $x=2$에서 접하므로 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\{f(x)-g(x)\}\,dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}(-6\ln x+6)\,dx+\int_{1}^{2}(-6x+12)\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-3x^2+6x)\,dx \\ &= \Big[-6x\ln x+12x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}+\Big[-3x^2+12x\Big]_{1}^{2}-\Big[-x^3+3x^2\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} \\ &= \frac{45}{8}-3\ln 2\end{aligned}$$

3. 출제근거

「미분 가능성과 연속성」, 『고등학교 수학 Ⅱ』, 좋은책신사고, 2020, 58-59쪽.
「다항함수의 미분」, 『고등학교 수학 Ⅱ』, 좋은책신사고, 2020, 61-66쪽.
「로그함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 비상교육 2020, 55-57쪽.
「도함수의 방정식과 부등식에의 활용」,『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 109-110쪽.
「다항함수의 정적분」, 『고등학교 수학 Ⅱ』, 좋은책신사고 2020, 110-126쪽.
「로그함수의 정적분」, 『고등학교 미적분』, 비상교육 2020, 134-137쪽.
「넓이」, 『고등학교 미적분』, 비상교육 2020, 147-149쪽.