〈오후〉

2023학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

고등학교 과정 수학에서 다루는 기본적인 내용에 대한 이해도를 평가하고자 하였다. 이를 위하여 고등학교 수학에서 배우는 경우의 수, 수열의 합과 극한, 미분의 개념을 알고 있는지 확인하는 문항들로 구성하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 고등학교 수학에서 배우는 개념들은 경우의 수를 이용하여 사회현상을 수학적 모델로 설명할 수 있으며, 조합을 활용하여 제시된 조건에 대한 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 수열의 합이 주어진 식으로부터 수열의 일반항을 구하고 급수의 합의 극한을 구할 수 있는지 평가한다. 유리식을 부분분수로 변환할 수 있어야 한다.
[1.3] 함수의 미분을 통해 주어진 조건을 설명하는 함수에 대한 여러 정보를 알아낼 수 있으며, 도함수를 확실히 이해하고 있고 제시된 함수에 적용할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] (1) 연수에게 강아지 1마리와 고양이 2마리, 그리고 강아지 2마리와 고양이 1마리를 주는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_5C_2 + {}_4C_2 \times {}_5C_1 = 70$$

이다.
(2) 두 사람에게 각각 2마리를 주는 전체 경우의 수는 ${}_9C_2 \times {}_7C_2$이다. 이 중,
(a) 고양이와 강아지를 1마리씩 민수에게 주고, 고양이 2마리를 창수에게 주는 경우
(b) 고양이 2마리를 민수에게 주고, 나머지 고양이 중 2마리를 창수에게 주는 경우
를 모두 빼면

$${}_9C_2 \times {}_7C_2 - ({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_4C_2 + {}_5C_2 \times {}_3C_2) = 756 - (120 + 30) = 606$$

이다.

[1.2] $a_1 = \dfrac{1 \times 6}{2} = 3$이고, $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n} &= \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right) - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n-1}\right) \\ &= \frac{n(n+5)}{2} - \frac{(n-1)(n+4)}{2} \\ &= n+2\end{aligned}$$

이므로 $a_n = n(n+2)$이다. 이것은 $n=1$인 경우도 포함하므로

$$a_n = n(n+2) \quad (n \geq 1)$$

이고

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$$

이다.

[1.3] 주어진 조건으로부터

$$g(3)=9f(3)-16, \quad f(3)=g(3)$$

이므로 $g(3)=f(3)=2$이다. 첫 번째 조건식의 양변을 x에 관하여 미분하고 $x=3$을 대입하면

$$g'(3)=12+9f'(3)$$

이고, 두 번째 조건으로부터

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right)=f'(3)-g'(3)=-4$$

이다. 따라서 $g'(3)=3$이다.

3. 출제근거

「경우의 수」, 『고등학교 수학』, 지학사, 2021, 115-276쪽.
「경우의 수」, 『고등학교 수학』, 천재교육, 2021, 272-275쪽.
「여러 가지 수열의 합」, 『고등학교 수학 I』, 지학사, 2021, 140-143쪽.
「수열의 수렴과 발산」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 11-15쪽.
「급수의 수렴과 발산」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 30-34쪽.
「도함수」, 『고등학교 수학 II』, 지학사, 2021, 62-71쪽.
「여러 가지 함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 48-57쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

제시문에 설명한 도형에 대하여 충분히 이해하고, 주어진 조건을 적절히 활용하여 필요한 결과를 수학적으로 도출할 수 있는 능력은 이공계 대학 교육을 받는 학생에게 필수적이다. 이 문제를 풀기 위한 개념은 호도법, 삼각함수, 직선의 기울기, 삼각함수의 미분, 최댓값 등 고등학생이 알아야 할 기본적인 내용이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 삼각형의 성질을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 부채꼴과 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 찾고 직선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
[2.4] 부채꼴과 삼각형의 넓이로 정의된 함수의 표현식을 찾고, 이 함수에 삼각함수의 미분을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 삼각형 OCP는 이등변삼각형이고 $\angle \mathrm{OPC}=\angle \mathrm{POC}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\angle \mathrm{OCP}=\pi-\angle \mathrm{POC}-\angle \mathrm{OPC}=2\theta$$

이다.

[2.2] 부채꼴 OCP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2^2\times 2\theta = 4\theta$$

이고, 삼각형 OCP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sin 2\theta = 2\sin 2\theta$$

이므로 $S_1 = 2(2\theta - \sin 2\theta)$이다.

[2.3] 점 P의 좌표를 (x,y)라 하면

$$x = 2 - 2\cos\frac{\pi}{3} = 1,\ y = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

이고, 점 Q의 좌표는 $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$이므로 점 P와 점 Q를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}}{1-0} = \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

이다.

[2.4] 점 P의 좌표를 (x,y)라 하면

$$x = 2 - 2\cos 2\theta,\ y = 2\sin 2\theta$$

이고, 점 Q의 좌표는 $(0, 4\theta)$이므로 점 P와 점 Q를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2\sin 2\theta - 4\theta}{2 - 2\cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta - 2\theta}{1 - \cos 2\theta}$$

이다. 또 점 P와 점 Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\sin 2\theta - 2\theta}{1 - \cos 2\theta}x + 4\theta$$

이므로 점 R의 x좌표는 $x = \dfrac{4\theta(1-\cos 2\theta)}{2\theta - \sin 2\theta}$이고,

$$S_2 = \frac{1}{2}\times\frac{4\theta(1-\cos 2\theta)}{2\theta - \sin 2\theta}\times 2\sin 2\theta = \frac{4\theta\sin 2\theta(1-\cos 2\theta)}{2\theta - \sin 2\theta}$$

이다. 따라서

$$f(\theta) = \frac{S_1\times S_2}{\theta} = 8\sin 2\theta(1-\cos 2\theta)$$

이다. $f(\theta)$를 θ에 대하여 미분하면

$$f'(\theta) = 16\cos 2\theta(1-\cos 2\theta) + 16\sin^2 2\theta = 16(1-\cos 2\theta)(1+2\cos 2\theta)$$

인데 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\cos 2\theta \neq 1$이므로 $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 $f'(\theta) = 0$이다. $f'(\theta)$의 부호를 조사하여 $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	최대	↘	

따라서 함수 $f(\theta)$는 $\theta = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8\sin\frac{2\pi}{3}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = 6\sqrt{3}$$

을 갖는다.

3. 출제근거

「직선의 방정식」, 『고등학교 수학』, 지학사, 2021, 127−130쪽.
「일반각과 호도법」, 『고등학교 수학 I』, 비상교육, 2021, 65−70쪽.
「삼각함수의 뜻」, 『고등학교 수학 I』, 비상교육, 2021, 71−75쪽.
「도함수」, 『고등학교 수학 II』, 동아출판, 2021, 62−67쪽.
「함수의 증가와 감소, 극대와 극소」, 『고등학교 수학 II』, 동아출판, 2021, 81−88쪽.
「사인함수와 코사인함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2021, 76−77쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

이 문제에서는 역함수 및 대칭이동 관계에 있는 함수의 그래프를 통해 그 그래프 위의 점들이 어떠한 관계에 있는지 이해하는 능력을 확인하고자 한다. 대칭 및 평행이동 관계에 있는 점 사이의 거리를 통해 주어진 조건에 맞는 해를 구하도록 한다. 또한 곡선 위의 점에서 접선의 방정식을 구하고 다항식의 적분을 통해 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다. 풀이 과정에서 주어진 제시문과 고등학교 수학 지식을 적절히 이용하여야 한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 주어진 함수의 역함수를 구하고 이의 그래프가 주어진 다른 함수의 그래프와 대칭이동 관계에 있음을 이해할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 역함수 관계에 있는 두 함수의 그래프 위의 두 점이 대칭 관계에 있음을 이해하고 이를 통해 조건에 맞는 해를 구할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 곡선 위의 점에서 접선의 방정식을 구하고 다항식의 적분을 통해 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] $g(x)$는 함수 $f(x) = \dfrac{1}{9}(x+1)^2+2$의 역함수이므로

$$g(x)=3\sqrt{x-2}-1$$

이다. 직선 BC의 기울기가 -1이므로, 점 C는 점 B를 x축의 방향으로 c(상수)만큼, y축의 방향으로 $-c$만큼 평행 이동한 점이다. 점 B는 $y=g(x)$ 위에 있고, 점 C는 $y=h(x)$ 위에 있는데, 함수 $h(x)=3\sqrt{x-3}-2$의 그래프는 함수 $g(x)=3\sqrt{x-2}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행 이동한 것이므로 $c=1$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}$이다.

[3.2] $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이고 선분 AB의 기울기가 -1이므로, 두 점 A와 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서

$$\mathrm{A}\,(3\sqrt{t-2}-1,\, t),\quad \mathrm{B}\,(t,\, 3\sqrt{t-2}-1)$$

이고,

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}\,(t-3\sqrt{t-2}+1)$$

이다. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}$이므로

$$t = 3\sqrt{t-2}$$
$$t^2 - 9t + 18 = (t-3)(t-6) = 0$$

이다. 그런데 $\frac{5}{2} < t < 5$이므로 $t = 3$이다.

[3.3] $t = 3$을 대입하면, $\mathrm{A}(2,3)$이다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,3)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(2) = \frac{2}{9}(2+1) = \frac{2}{3}$$

이므로, 접선의 방정식은 $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$이다. 따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \left\{\frac{1}{9}(x+1)^2 + 2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right\} dx = \frac{8}{27}$$

이다.

3. 출제근거

「도함수의 활용」,『고등학교 미적분』, 비상교육, 2020, 96-112쪽.
「접선의 방정식」,『고등학교 수학 II』, 지학사, 2021, 75-77쪽.
「적분법」,『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 138-173쪽.
「여러가지 적분법」,『고등학교 미적분』, 천재교과서, 2021, 156-194쪽.
「정적분의 활용」,『고등학교 수학 II』, 비상교육, 2020, 125-131쪽.
「정적분의 계산」,『고등학교 수학 II』, 좋은책신사고, 2020, 123-126쪽.
「도형의 방정식」,『고등학교 수학』, 지학사, 2021, 110-163쪽.
「함수와 그래프」,『고등학교 수학』, 지학사, 2021, 218-249쪽.