[광운대학교 2023학년도 논술고사 문제해설 - 자연 1교시 1번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1교시 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	지수법칙, 귀류법, 조건부 확률, 정적분
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 귀류법
   어떤 명제가 참임을 증명할 때, 주어진 명제의 결론을 부정하여 가정 또는 이미 알려진 수학적 사실 등에 모순됨을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

2. 조건부 확률
   사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ \ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

[1] 다음 물음에 답하시오.

(1) 실수 a에 대하여 $3^a=4$일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}}$의 값을 구하시오. [5점]

(2) 귀류법을 이용하여 $\log_3 4$가 무리수임을 증명하시오. [5점]

[2] $-\pi\le x\le\pi$에서 방정식 $\cos^2 x-\sin x-x=0$을 만족시키는 실근의 개수를 구하시오. [9점]

[3] 어떤 데이터 조사에 따르면 이메일 중 스팸메일이 25%, 스팸메일 중 ‘계좌’라는 단어가 들어가 있을 확률은 80%, 스팸메일이 아닌 이메일 중 ‘계좌’라는 단어가 들어가 있을 확률은 30%라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 이메일에 ‘계좌’라는 단어가 들어가 있고 스팸메일이 아닐 확률을 구하시오. [4점]

(2) 이메일에 ‘계좌’라는 단어가 들어가 있을 확률을 구하시오. [5점]

(3) 이메일에 ‘계좌’라는 단어가 들어가 있을 때, 이 이메일이 스팸메일일 확률을 구하시오. [6점]

[4] 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 아래 조건을 만족할 때, 다음 물음에 답하시오.

(ⅰ) $f(x)=g(x)+h(x)$ (ⅱ) $g(-x)=g(x)$, $h(-x)=-h(x)$

(1) 함수 $g(x)$와 $h(x)$를 $f(x)$와 $f(-x)$를 이용하여 나타내고, 위 조건이 만족됨을 보이시오. [6점]

(2) (1)을 이용하여 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{(x+p)^2+1}dx=0$이면 $p=0$임을 보이시오. (단, p는 실수) [10점]

3. 출제 의도

[1] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있는지를 판단한다. 귀류법을 이용하여 간단한 증명을 할 수 있는지를 판단한다.

[2] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는지를 판단한다.

[3] 확률의 덧셈정리와 곱셈정리 조건부 확률의 의미를 이해하고 활용할 수 있는지를 판단한다.

[4] 연속함수의 성질을 이해하고 정적분 값을 계산할 수 있는지를 판단한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - 2 명제
	성취기준	[10수학03-07]대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
제시문2	교육과정	[확통] - (2) 확률 - 2 조건부 확률
	성취기준	[12확통02-05]조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 3 인수분해
	성취기준	[12수학Ⅰ01-03]지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - 2 명제
	성취기준	[10수학03-07]대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
문항 [2]	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[확통] - (2) 확률 - 2 조건부 확률
	성취기준	[12확통02-07]확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[확통] - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용
	성취기준	[12확통02-03]확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [3](3)	교육과정	[확통] - (2) 확률 - 2 조건부 확률
	성취기준	[12확통02-05]조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
	성취기준	[12수학Ⅱ01-04]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [4](2)	교육과정	[미적] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-03]여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2022년	190
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2021년	37
	미적분	이준열 외	천재교육	2021년	120
	확률과 통계	김원경 외	비상	2022년	67

5. 문항 해설

[1] (1) 지수법칙을 이용하여 주어진 조건을 포함하는 방식으로 식을 변형할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 귀류법을 이용하여 간단한 증명을 수행할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[2] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 그래프의 개형을 그려 근의 존재를 알 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3] (1) 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(3) 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[4] (1) 연속함수의 성질을 이용하고 주어진 조건을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 정적분의 값을 계산하는 것을 바탕으로 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1) 5점	$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}}=(3^a)^{-\frac{1}{4}}$ 이나 $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}}=3^{-\frac{1}{4}\log_3 4}$ 을 얻으면	2
	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 얻으면	3
[1](2) 5점	$\log_3 4$는 유리수라고 가정하고 $\log_3 4=\frac{q}{p}$ 을 언급하면	2
	$\log_3 4>0$이므로 $p,\ q$가 자연수임을 언급하면	1
	3^q은 홀수이고 4^p은 짝수이므로 모순임을 언급하면	2
[2] 9점	$f(x)=\cos^2 x-\sin x=-\sin^2 x-\sin x+1$ 나 $f(x)=\cos^2 x-\sin x-x$을 얻으면	2
	$f'(x)=0$을 만족하는 $x=-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ x=-\frac{\pi}{6},\ -\frac{5\pi}{6}$ 을 얻거나 일부 구간에서 $f(x)>0$임을 올바로 얻으면	2
	제시된 주요 구간에서 함수의 증감표나 함숫값의 부호가 모두 올바르면	3
	근의 개수가 1개임을 제시하면	2

하위 문항	채점 기준	배점
[3](1) 4점	$\mathrm{P}(A^C \cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B \mid A^C)$에 해당하는 수식을 올바로 제시하면	1
	$\frac{9}{40}$이나 0.225를 얻으면	3
[3](2) 5점	$\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)$과 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A \cap B)+\mathrm{P}(A^C \cap B)$에 해당하는 수식을 제시하면	2
	$\frac{17}{40}$이나 0.425를 얻으면	3
[3](3) 6점	$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$에 해당하는 수식을 올바로 제시하면	2
	$\frac{8}{17}$이나 0.47을 올바로 제시하면	4
[4](1) 6점	$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$을 얻으면	3
	연립방정식을 풀어 $g(x), h(x)$를 얻었거나, $g(x), h(x)$가 조건을 만족함을 보인 경우	3
[4](2) 10점	$\int_{-1}^{1} g(x)dx=2\int_{0}^{1} g(x)dx$나 $\int_{-1}^{1} h(x)dx=0$을 언급하면	2
	$g(x)=-2p\frac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}}$을 얻으면	2
	$\int_{-1}^{1} f(x)dx = -4p\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}}dx$	4
	올바른 근거에 바탕해 $p=0$을 얻으면	2

7. 예시 답안

[1]

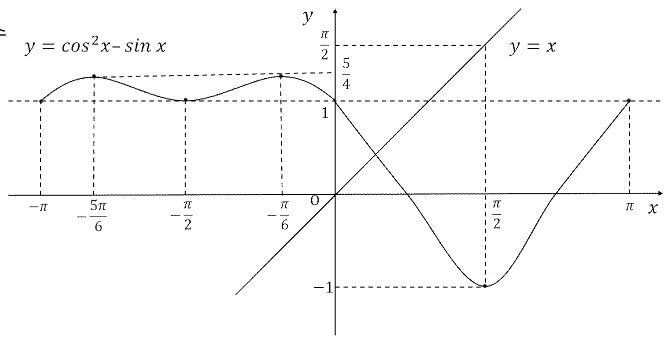
(1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}}=3^{-3\times\frac{a}{12}}=\left(3^a\right)^{-\frac{1}{4}}=4^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(다른 풀이) $a=\log_3 4$이므로 $p^{\log_p q}=q$를 이용하면 $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{a}{12}}=3^{-\frac{a}{4}}=3^{-\frac{1}{4}\log_3 4}=3^{\log_3\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\log_3 4$는 유리수라고 가정하자.
$\log_3 4>0$이므로 $\log_3 4=\frac{q}{p}$인 자연수 p, q가 존재한다.
$\log_3 4=\frac{q}{p} \Leftrightarrow 3^{\frac{q}{p}}=4$로부터 $3^q=4^p$을 얻는다.
3^q은 홀수이고 4^p은 짝수이므로 모순이다.
따라서 $\log_3 4$는 무리수이다.

[2]

주어진 방정식의 실근을 두 함수 $f(x)=\cos^2 x-\sin x$와 $y=x$의 교점으로 구한다.



$f(x)=\cos^2 x-\sin x=-\sin^2 x-\sin x+1$

$f'(x)=-2\sin x\cos x-\cos x=-\cos x(2\sin x+1)$

$f'(x)=0$을 만족하는 극값을 구하면

$\cos x=0$에서 $x=-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$에서 $x=-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$

함수의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1	↗	1

$-\pi\le x\le\pi$에서, 그래프의 개형을 고려하면
두 함수 $f(x)=\cos^2 x-\sin x$와 $y=x$는 한점에서 만난다.
따라서 $-\pi\le x\le\pi$에서 방정식 $\cos^2 x-\sin x-x=0$은 1개의 실근을 갖는다.

(다른 풀이)
함수 $f(x)=\cos^2 x-\sin x-x$로 놓으면
$f(x)=-\sin^2 x-\sin x+1-x=-\sin x(1+\sin x)+1-x$
(i) $-\pi\le x\le 0$에서 $-\sin x(1+\sin x)\ge 0$이고 $1-x>0$이므로 $f(x)>0$
(ii) $x=\frac{\pi}{2}$에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-\frac{\pi}{2}<0$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$는 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

사잇값 정리에 의해 $0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 $f(x) = 0$은 적어도 1개의 실근을 갖는다.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 $f'(x) = -2\sin x \cos x - \cos x - 1 = -\sin(2x) - \cos x - 1 < 0$

따라서 $f(x)$는 $0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 감소하므로,

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 $f(x) = 0$은 단 1개의 실근을 갖는다.

(iii) $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$에서 $-\sin x(1 + \sin x) \le 0$이고 $1 - x < 0$이므로 $f(x) < 0$

따라서 $-\pi \le x \le \pi$에서 방정식 $\cos^2 x - \sin x - x = 0$은 1개의 실근을 갖는다.

[3] 이메일이 스팸메일인 사건을 A, 스팸메일이 아닌 사건을 A^C,
이메일에 단어 '계좌'가 들어가 있을 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A^C) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B|A) = \frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C) = \frac{3}{10}$

(1) $\mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{40}$

(2) $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^C \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{9}{40} = \frac{17}{40}$

(3)

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{17}{40}} = \frac{8}{17}$$

(다른 풀이)

$\mathrm{P}(A) = 0.25$, $\mathrm{P}(A^C) = 0.75$, $\mathrm{P}(B|A) = 0.8$, $\mathrm{P}(B|A^C) = 0.3$

(1) $\mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C) = 0.75 \times 0.3 = 0.225$

(2) $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = 0.25 \times 0.8 = 0.2$이므로

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^C \cap B) = 0.2 + 0.225 = 0.425$

(3)

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0.2}{0.425} = \frac{8}{17}$$

[4]

(1) 조건 (ⅰ)에 의해 $f(x) = g(x) + h(x)$ …… ①

조건 (ⅱ)에 의해 $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ …… ②

①, ②를 연립하여 $g(x)$와 $h(x)$를 구하면

$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

따라서 $f(x) = g(x) + h(x)$

$$g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x)$$

$$h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)$$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{(x+p)^2+1}$ 라고 하자.

조건 (ii)에 의해 $\int_{-1}^{1}g(x)dx=2\int_{0}^{1}g(x)dx$ 이고 $\int_{-1}^{1}h(x)dx=0$

그러므로

$$f(x)=g(x)+h(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{(x+p)^2+1}+\frac{-x}{(-x+p)^2+1}\right\}+h(x)$$

$$=\frac{x}{2}\frac{\{(-x+p)^2+1-(x+p)^2-1\}}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}}+h(x)$$

$$=-2p\frac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}}+h(x)$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\{g(x)+h(x)\}dx=2\int_{0}^{1}g(x)dx$$

$$=-4p\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}}dx$$

함수 $\dfrac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(-x+p)^2+1\}}$ 는 구간 $(0,1)$에서 양이므로 정적분 값은 0이 아니다.

그러므로 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$이면 $p=0$이다.

[광운대학교 2023학년도 논술고사 문제해설 - 자연 1교시 2번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1교시 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	내분점, 근과 계수의 관계, 함수의 극값, 미분가능
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 좌표평면 위의 선분의 내분점

두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여

선분 AB를 $m:n(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

2. 미분가능

함수 $y=f(x)$에 대하여

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

3. 미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

[1] 아래 조건을 만족시키는 원에 대하여 다음 물음에 답하시오.

> 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 y축에 모두 접한다.
> 직선 $3x+4y-6=0$과 한 점에서 만난다.

(1) 위 조건을 만족시키는 모든 원의 반지름의 길이를 구하시오. [4점]

(2) 직선 $3x+4y-6=0$이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라고 할 때, 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 P라고 하자. 점 P에서 위 조건을 만족하는 가장 작은 원에 접선을 그었을 때, 두 접선이 이루는 예각 θ에 대하여 $\sin\theta$ 값을 구하시오. [8점]

[2] 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근을 $\alpha, \beta\,(\alpha>\beta)$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $k(\alpha^5-\beta^5)=5$를 만족하는 실수 k의 값을 구하시오. [6점]

(2) 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+4}-\beta^{n+4}}{\alpha^n-\beta^n}$을 구하시오. [8점]

[3] 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $k\geq\frac{1}{2}$)

$$f(x)=\frac{e^x}{kx^2+x+1}, \qquad g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$$

(1) 함수 $f(x)$의 극값을 구하시오. [10점]

(2) $x>0$에서 함수 $y=\frac{e^x}{\frac{1}{2}x^2+x+1}$을 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$임을 보이시오. [7점]

(3) $x=0$에서 함수 $g(x)$의 미분가능성을 조사하시오. [7점]

3. 출제 의도

[1] 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있고 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해하여 문제를 해결하는 능력을 판단한다.

[2] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하고, 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 판단한다.

[3] 함수의 극값과 극한값을 구하고 미분가능성을 조사할 수 있는지 판단한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학] - (2) 기하 - ① 평면좌표
	성취기준	[10수학02-02]선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ① 미분계수
	성취기준	[12수학Ⅱ02-01]미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식
	성취기준	[10수학02-07]좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식
	성취기준	[10수학02-07]좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-08]이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
문항 [2](2)	교육과정	[미적] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한
	성취기준	[12미적01-02]수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한
	성취기준	[12수학Ⅱ01-02]함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문항 [3](3)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ① 미분계수
	성취기준	[12수학Ⅱ02-01]미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2022년	133
	수학Ⅰ	김원경 외	비상	2021년	127
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2021년	83
	미적분	이준열 외	천재교육	2021년	22

5. 문항 해설

[1] (1) 주어진 조건을 만족하는 원의 방정식을 쓰고 점과 직선 사이의 거리를 구하여 문제를 해결할 수 있다.

(2) 내분점을 구하고 삼각형의 변의 길이를 계산하여 삼각함수 값을 구할 수 있다.

[2] (1) 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 주어진 식을 간단히 하여 해결할 수 있다.

(2) 공비가 1보다 작은 등비급수의 극한값이 0이 됨을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

[3] (1) 주어진 함수의 미분을 활용한 극대, 극소 판정을 적용하여 해결할 수 있다.

(2) (1)에서 찾은 성질을 활용하여 함수의 극한값을 계산할 수 있다.

(3) 미분의 정의에 따라 식을 쓰고 좌극한과 우극한을 따로 계산하여 해결할 수 있는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1) 4점	$a=3$ 또는 $a=\frac{1}{2}$을 얻으면	2
	위 값을 얻는 과정을 올바로 기술하였으면	2
[1](2) 8점	점 P의 좌표 $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$을 얻으면	2
	$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$등 $\sin\theta$를 얻는데 필요한 유의미한 정보를 계산하면	2
	$\sin\theta=\frac{24}{25}$을 얻으면	4
[2](1) 6점	$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\alpha^2+\beta^2=3$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ 등 일부 올바른 계산을 수행하면	2
	$\alpha^5=5\alpha+3$을 얻거나 $\alpha^5-\beta^5=5\sqrt{5}$을 얻으면	2
	$k=\frac{\sqrt{5}}{5}$를 얻으면	2
[2](2) 8점	$\frac{\alpha^{n+4}-\beta^{n+4}}{\alpha^n-\beta^n}=\frac{\alpha^4-\beta^4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$을 얻으면	2

하위 문항	채점 기준	배점
	$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 이고 $\left\lvert\frac{\beta}{\alpha}\right\rvert<1$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}=0$을 제시하면	2
	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+4}-\beta^{n+4}}{\alpha^{n}-\beta^{n}}=\alpha^{4}$을 얻으면	2
	$\alpha^{4}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ 을 얻으면	2
[3](1) 10점	$f'(x)=\frac{e^{x}x(kx-2k+1)}{(kx^{2}+x+1)^{2}}$ 을 얻으면	2
	$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2-\frac{1}{k}$을 얻으면	2
	$k=\frac{1}{2}$과 $k>\frac{1}{2}$을 구분하여 증감표 작성을 하면	3
	극댓값과 극솟값을 올바로 얻으면	3
[3](2) 7점	$y'(x)=\frac{2x^{2}e^{x}}{(x^{2}+2x+2)^{2}}$ 을 얻으면	2
	$e^{x}>\frac{1}{2}x^{2}+x+1>\frac{1}{2}x^{2}$을 얻으면	3
	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$을 제시하면	2
[3](3) 7점	$x<0$일 때, $\lim\limits_{x\to0-}\frac{g(x)}{x}=0$을 얻으면	3
	$x>0$일 때, $\lim\limits_{x\to0+}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t}}=0$을 얻으면	3
	두 사실을 종합하여 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다는 결론을 도출하면	1

7. 예시 답안

[1]

(1) 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $(a>0)$이라고
하면 점 (a, a)와 직선 $3x+4y-6=0$
사이의 거리는 반지름 a와 같으므로

$$\frac{|3a+4a-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|7a-6|}{5}=a$$

이 식을 풀면 $a=3$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(2) 직선 $3x+4y-6=0$의 x절편, y절편은 각각 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{3}{2}\right)$

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1\times 0+2\times 2}{1+2}, \frac{1\times\frac{3}{2}+2\times 0}{1+2}\right)=\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

조건을 만족하는 가장 작은 원의 방정식은 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

점 P에서의 원에 그은 두 접선 중 하나는 직선 $3x+4y-6=0$이고,

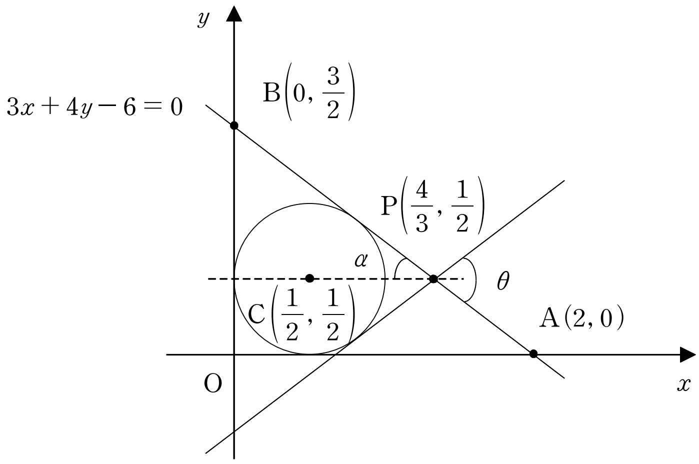
원의 중심 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$과 점 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$가 x축과 평행한 직선 위에 있으므로

선분 CP와 직선 $3x+4y-6=0$가 이루는 예각을 α라 하면

삼각형 OAB에서 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

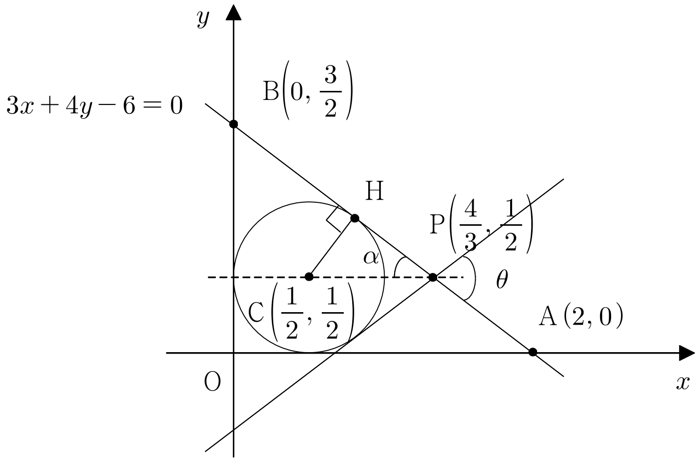
점 P에서의 원에 그은 또 다른 접선과 선분 CP가 이루는 각도 α이므로
두 접선이 이루는 각 $\theta=2\alpha$

따라서 $\sin\theta=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$



(다른 풀이)

원의 중심 $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서
직선 $3x+4y-6=0$에 내린
수선의 발을 H라 하자.



$\overline{CP}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+0}=\frac{5}{6}$

$\overline{CH}=\frac{1}{2}$이므로

$\overline{PH}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{3}$

$\sin\alpha=\frac{\overline{CH}}{\overline{CP}}=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\overline{PH}}{\overline{CP}}=\frac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta=\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$

[2]

(1) 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근인 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$와 $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$는 다음 식들을 만족한다.

$\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$
이를 이용하면 다음을 얻는다.
$\alpha^5=(\alpha^2)^2\alpha=(\alpha+1)^2\alpha=\alpha(\alpha^2)+2\alpha^2+\alpha$
$\quad=\alpha(\alpha+1)+2(\alpha+1)+\alpha=\alpha+1+4\alpha+2=5\alpha+3$
$k(\alpha^5-\beta^5)=k(5\alpha+3-5\beta-3)=5k(\alpha-\beta)=5k\sqrt{5}=5$
따라서 $k=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(다른 풀이)

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근인 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$와 $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$는 다음 식들을 만족한다.

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$, $\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3$
이를 이용하면 다음을 얻는다.
$\alpha^5-\beta^5=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)+\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)$
$=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)+\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)$
$=\sqrt{5}\{3-(-1)\}+\sqrt{5}=5\sqrt{5}$
이로부터 $k(\alpha^5-\beta^5)=5k\sqrt{5}=5$
따라서 $k=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(2) $$\frac{\alpha^{n+4}-\beta^{n+4}}{\alpha^n-\beta^n}=\frac{\alpha^4-\beta^4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 이고 $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+4}-\beta^{n+4}}{\alpha^n-\beta^n}=\alpha^4$

$\alpha^2-\alpha-1=0$이므로 $\alpha^4=(\alpha+1)^2=\alpha+1+2\alpha+1=3\alpha+2=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

[3]

(1) $k>\frac{1}{4}$일 때 $kx^2+x+1>0$이므로 $k\ge\frac{1}{2}$에 대하여 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 미분가능하다.

함수의 몫의 미분법을 이용하면 $f'(x)=\frac{e^x x(kx-2k+1)}{(kx^2+x+1)^2}$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2-\frac{1}{k}$

(i) $k=\frac{1}{2}$일 때, $2-\frac{1}{k}=0$이므로 $f'(x)=\frac{2x^2e^x}{(x^2+2x+2)^2}$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 변하지 않으므로 극값이 없다.

(ii) $k>\frac{1}{2}$일 때,

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\frac{1}{k}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	$\frac{e^{2-\frac{1}{k}}}{4k-1}$ 극소	$\nearrow$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 1,

$x=2-\frac{1}{k}$ 에서 극소이고 극솟값은 $\frac{e^{2-\frac{1}{k}}}{4k-1}$

(2) $y'(x)=\frac{2x^2e^x}{(x^2+2x+2)^2}\ge 0$이므로

$y(x)$는 열린구간 $(0,\infty)$에서 증가하고

$y(x)>y(0)=1$

즉 $x>0$에서, $e^x>\frac{1}{2}x^2+x+1>\frac{1}{2}x^2$

그러므로 $0<\frac{x}{e^x}<\frac{2}{x}$이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$이므로

함수의 극한의 대소 관계를 이용하면 $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$이다.

(3) $g(0) = 0$이므로 극한 $g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$

$x < 0$일 때, $g(x) = 0$이므로 $\lim_{x \to 0-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{0}{x} = 0$ $\quad\cdots\cdots$①

$x > 0$일 때, $t = \frac{1}{x}$라고 놓으면 $x \to 0+$일 때 $t \to \infty$이므로

$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ $\quad\cdots\cdots$②

따라서 ①과 ②로부터 $g'(0) = 0$이고 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 미분가능하다.