2023학년도 수시모집 논술고사
문항해설 및 채점기준(자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 1]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열/문항번호1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 수학 Ⅱ
	핵심개념 및 용어	미분계수, 접선의 방정식, 함수의 최댓값, 정적분, 곡선과 직선 사이의 넓이, 삼각함수
예상 소요 시간	총 90분 중 45분 소요 예상	

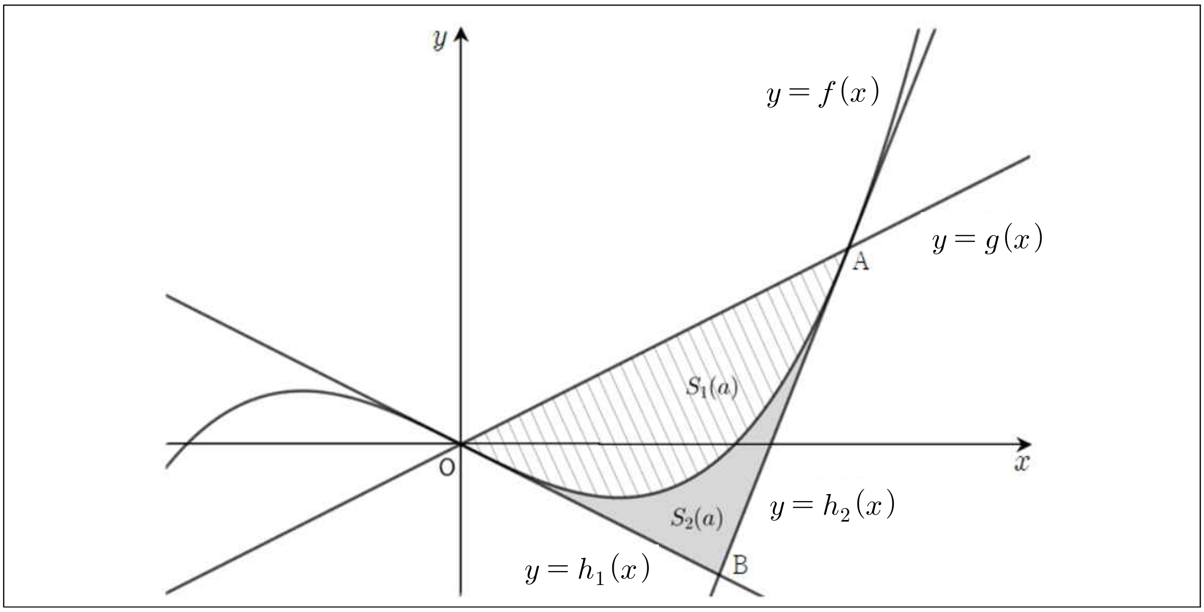
2. 문항 및 제시문

[문1]

양수 a에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3-\frac{3a^2}{2}x$와 일차함수 $g(x)=\frac{3a^2}{2}x$가 있다. 그림과 같이 $x \geq 0$에서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 교점 중 원점 O가 아닌 점을 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$이라 하자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 O에서의 접선의 방정식을 $y=h_1(x)$, 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=h_2(x)$라 하고 두 접선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 교점을 B라 하자.

$0 \leq x \leq x_1$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1(a)$라 하고 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_2(a)$라 하자.



[문제 1-1]
점 $C(p,q)$는 곡선 $y=f(x)$ $(0<x<x_1)$ 위의 점이다. 삼각형 AOC의 넓이가 최대가 되는 점 C를 C_0이라 하자. 점 C_0의 좌표와 삼각형 AOC_0의 넓이를 구하시오. [35점]

[문제 1-2]
점 B의 좌표를 구하고, $S_1(a)=k\cdot S_2(a)$를 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오. [45점]

[문제 1-3]
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때, 다음 식을 만족시키는 θ의 값을 구하시오. [20점]

$$\frac{9-4S_1(\sin\theta)}{4S_1(\sqrt{\cos\theta})+8S_1(\sqrt{\sin\theta})}=\frac{1}{2}$$

3. 출제 의도

[문제 1-1] 다항함수를 미분하여 접선의 기울기를 구할 수 있는지 알아본다.
다항함수의 미분을 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 알아본다.
삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 1-2] 접선의 방정식을 구할 수 있는지 알아본다.
다항함수의 정적분을 이용해서 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 1-3] 삼각함수가 포함된 방정식을 풀 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
1	1-1	**[수학]-(2)기하-(가)평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(2)미분-(가)미분계수** [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. **[수학Ⅱ]-(2)미분-(다)도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	1-2	**[수학]-(2)기하-(가)평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(2)미분-(다)도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(3)적분-(다)정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	1-3	**[수학Ⅰ]-(2)삼각함수-(가)삼각함수** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학	김원경 외 14인	비상교육	2020	98~125		
	수학Ⅰ	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2021	70~90		
	수학Ⅱ	이준열 외 9인	천재교육	2021	53~97, 121~139		
	수학Ⅱ	류희찬 외 10인	천재교과서	2020	52~97, 122~139		

5. 문항 해설

[문제1-1]
- 주어진 조건에서 삼각형의 넓이가 최대가 될 수 있는 상황을 파악한다.
- 삼각형의 넓이가 최대가 되게 하는 곡선 위의 점을 구한다.
- 삼각형의 넓이를 구한다.

[문제1-2]
- 주어진 함수의 접선의 방정식을 구한다.
- 두 직선의 교점을 구한다.
- 구하고자 하는 영역의 넓이를 적분을 이용하여 계산한다.

[문제1-3]
- 주어진 식을 이해하고 간단하게 표현할 수 있다.
- 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식을 간단하게 정리한다.
- 특수각의 삼각함수 값을 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식을 푼다.

6. 채점 기준

[문제1-1]
[예시답안 1]
- 점 C_0의 좌표를 정확히 구하면 +15점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(10점): 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C_0에서의 접선이 직선 $y=g(x)$와 평행임을 이용하여 (1)과 같은 관계를 구하였다.

− A(15점): (1)을 구하고, (2)와 같이 점 C_0의 좌표를 정확히 구하였다.

- 삼각형 AOC_0의 최대 넓이를 구하면 +20점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - D(5점): (3), (4), (5) 중 한 개를 정확히 구하였다.
  - C(10점): (3), (4), (5) 중 두 개를 정확히 구하였다.
  - B(15점): (3), (4), (5) 모두 정확히 구하였다.
  - A(20점): (3), (4), (5)를 종합하여 삼각형 AOC_0의 넓이를 (6)과 같이 정확히 구하였다.

[예시답안 2]

- 삼각형 AOC의 넓이에 관한 식을 표현하면 +20점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - D(5점): (7), (8), (9) 중 한 개를 정확히 구하였다.
  - C(10점): (7), (8), (9) 중 두 개를 정확히 구하였다.
  - B(15점): (7), (8), (9) 모두 정확히 구하였다.
  - A(20점): (7), (8), (9)를 종합하여 (10)과 같은 식을 구하였다.
- 점 C_0의 좌표와 삼각형 AOC_0 넓이를 구하면 +15점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(5점): (11)과 같이 삼각형 AOC_0의 넓이를 p에 대한 함수로 표현하여 미분하고, 증감표 등을 이용하여 $p=a$일 때 삼각형 AOC_0의 넓이가 최대임을 보였다.
  - B(10점): 점 C_0의 좌표 또는 삼각형 AOC_0의 넓이 중 하나를 구하였다.
  - A(15점): 점 C_0의 좌표와 삼각형 AOC_0의 넓이를 모두 구하였다.

[문제1−2]

[예시답안 1]

- 점 B의 좌표를 구하면 +15점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(5점): (12)나 (13) 중 하나만 정확히 구하였다.
  - B(10점): (12)와 (13) 모두 정확히 구하였다.
  - A(15점): (12)와 (13)이 맞고, (14)와 같이 점 B의 좌표를 정확히 구하였다.
- $S_1(a)$를 구하면 +10점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(5점): (15)의 첫 번째 등호처럼 $S_1(a)$를 정적분을 이용하여 표현하였지만 그 값을 정확하게 구하지 못하였다.
  - A(10점): (15)와 같이 $S_1(a)$를 정적분을 이용하여 표현하고 그 값도 정확하게

구하였다.

- $S_2(a)$를 구하면 +15점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(5점): (16)만 정확히 구하였다.
  - B(10점): (17)까지 정확히 구하였다.
  - A(15점): $S_2(a)$의 값을 정확히 구하였다.
- k의 값을 구하면 +5점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(5점): k의 값을 정확히 구하였다.

[예시답안 2]

- 점 B의 좌표를 구하면 +15점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(5점): (18)이나 (19) 중 하나만 정확히 구하였다.
  - B(10점): (18)과 (19) 모두 정확히 구하였다.
  - A(15점): (18)과 (19)가 맞고, (20)과 같이 점 B의 좌표를 정확히 구하였다.
- $S_1(a)$를 구하면 +10점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(5점): (21)의 첫 번째 등호처럼 $S_1(a)$를 정적분을 이용하여 표현하였지만 그 값을 정확하게 구하지 못하였다.
  - A(10점): (21)와 같이 $S_1(a)$를 정적분을 이용하여 표현하고 그 값도 정확하게 구하였다.
- $S_2(a)$를 구하면 +15점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(5점): (22)와 같이 $S_2(a)$를 정적분을 이용하여 표현하였다.
  - B(10점): (23)의 첫 번째 등식과 같은 정확한 표현을 하였다.
  - A(15점): $S_2(a)$의 값을 정확하게 구하였다.
- k의 값을 구하면 +5점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(5점): k의 값을 정확히 구하였다.

[문제1-3]

- 주어진 식을 정리해서 간결하게 쓰면 +15점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(5점): (24)와 같이 식을 정리하였다.
  - B(10점): (25)까지 식을 정리하였다.
  - A(15점): (26)까지 식을 정리하였다.

- 삼각함수가 포함된 방정식을 정확히 풀면 +5점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(5점): θ의 값을 정확히 구하였다.

7. 예시 답안

[문제1-1]

[예시답안 1] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선이 $y=g(x)$와 평행인 경우 삼각형 $\mathrm{AOC_0}$의 넓이가 최대이다. 따라서 점 $\mathrm{C_0}$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 $\frac{3a^2}{2}$이므로, 점 $\mathrm{C_0}$의 x좌표를 t라 하면

$$f'(t)=3t^2-\frac{3a^2}{2}=\frac{3a^2}{2} \tag{1}$$

이므로 $t=\pm a$이다. $t>0$이므로 $\mathrm{C_0}$의 좌표는

$$\mathrm{C_0}\left(a,-\frac{a^3}{2}\right). \tag{2}$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3-\frac{3a^2}{2}x=\frac{3a^2}{2}x \Leftrightarrow x=0,\ \pm\sqrt{3}\,a$$

이고 점 A의 x좌표가 양수이므로 A의 좌표는

$$\mathrm{A}\left(\sqrt{3}\,a,\frac{3\sqrt{3}\,a^3}{2}\right). \tag{3}$$

따라서 선분 OA의 길이는

$$\sqrt{(\sqrt{3}\,a-0)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}\,a^3}{2}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\sqrt{9a^4+4} \tag{4}$$

이고 점 $\mathrm{C_0}$와 직선 $y=\frac{3a^2}{2}x$ 사이의 거리가

$$\frac{\left|\frac{3a^2}{2}\cdot a-\left(-\frac{a^3}{2}\right)\right|}{\sqrt{\left(\frac{3a^2}{2}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{4a^3}{\sqrt{9a^4+4}} \tag{5}$$

이므로, 삼각형 $\mathrm{AOC_0}$의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}\,a}{2}\sqrt{9a^4+4} \cdot \frac{4a^3}{\sqrt{9a^4+4}} = \sqrt{3}\,a^4. \tag{6}$$

[예시답안 2] $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3 - \frac{3a^2}{2}x = \frac{3a^2}{2}x \Leftrightarrow x=0,\ \pm\sqrt{3}\,a$

이고 점 A의 x좌표가 양수이므로 점 A의 좌표는

$$\mathrm{A}\left(\sqrt{3}\,a, \frac{3\sqrt{3}\,a^3}{2}\right) \tag{7}$$

따라서 선분 OA의 길이는

$$\sqrt{(\sqrt{3}\,a-0)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}\,a^3}{2}-0\right)^2} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2}\sqrt{9a^4+4} \tag{8}$$

이고 점 C와 직선 $y=\frac{3a^2}{2}x$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{3a^2}{2}\cdot p - q\right|}{\sqrt{\left(\frac{3a^2}{2}\right)^2+(-1)^2}} = \frac{|3a^2p-2q|}{\sqrt{9a^4+4}}. \tag{9}$$

점 $\mathrm{C}(p,q)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $q=p^3-\frac{3a^2}{2}p$

이고, 따라서 (8), (9)에 의하여 삼각형 AOC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}\,a}{2}\sqrt{9a^4+4} \cdot \frac{|3a^2p-2q|}{\sqrt{9a^4+4}} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2}\left|-p^3+3a^2p\right|. \tag{10}$$

$T(p)=-p^3+3a^2p$ 라 하면

$$\begin{gathered} T'(p)=-3p^2+3a^2=-3(p-a)(p+a) \text{ 이므로} \\ T'(p)=0 \Leftrightarrow p=\pm a. \end{gathered} \tag{11}$$

닫힌구간 $[0, \sqrt{3}\,a]$에서 함수 $T(p)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

p	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$\sqrt{3}\,a$
$T'(p)$		$+$	0	$-$	
$T(p)$	0	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	0

$T(p)$는 $p=a$일 때 최대이고 $T(p)>0$이므로, C_0의 좌표는 $\mathrm{C}_0\left(a, -\frac{a^3}{2}\right)$이며 삼각형

AOC_0의 넓이는 (10)에 의하여 $\sqrt{3}a^4$이다.

[문제1-2]

[예시답안 1] $f'(x)=3x^2-\frac{3a^2}{2}$이므로 $f'(0)=-\frac{3a^2}{2}$, $f'(\sqrt{3}a)=\frac{15a^2}{2}$이다. 따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $O(0,0)$에서의 접선의 방정식은

$$h_1(x)=-\frac{3a^2}{2}x, \tag{12}$$

점 $A\left(\sqrt{3}a, \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$h_2(x)=\frac{15a^2}{2}(x-\sqrt{3}a)+\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}=\frac{15a^2}{2}x-6\sqrt{3}a^3. \tag{13}$$

(12), (13)에 의하여

$$h_1(x)=h_2(x) \Leftrightarrow \frac{15a^2}{2}x-6\sqrt{3}a^3=-\frac{3a^2}{2}x \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

이므로 점 B의 좌표는

$$B\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}, -\sqrt{3}a^3\right). \tag{14}$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점이 $O(0,0)$, $A\left(\sqrt{3}a, \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}\right)$이므로

$$S_1(a)=\int_0^{\sqrt{3}a}\left\{\frac{3a^2}{2}x-\left(x^3-\frac{3a^2}{2}x\right)\right\}dx=\frac{9a^4}{4}. \tag{15}$$

점 $B\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}, -\sqrt{3}a^3\right)$와 직선 $y=\frac{3}{2}a^2x$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}a}{3}-(-\sqrt{3}a^3)\right|}{\sqrt{\left(\frac{3a^2}{2}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{3}a^3}{\sqrt{9a^4+4}}. \tag{16}$$

(4)에 의해 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}\sqrt{9a^4+4}\cdot\frac{4\sqrt{3}a^3}{\sqrt{9a^4+4}}=3a^4 \tag{17}$$

이므로 $S_2(a)=3a^4-\frac{9a^4}{4}=\frac{3a^4}{4}$이다.

따라서 (15)에 의하여 $S_1(a)=k\cdot S_2(a)$를 만족시키는 k의 값은 3이다.

[예시답안 2] $f'(x)=3x^2-\frac{3a^2}{2}$이므로 $f'(0)=-\frac{3a^2}{2}$, $f'(\sqrt{3}a)=\frac{15a^2}{2}$이다. 따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 O(0,0)에서의 접선의 방정식은

$$h_1(x)=-\frac{3a^2}{2}x, \tag{18}$$

점 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3}a,\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$h_2(x)=\frac{15a^2}{2}(x-\sqrt{3}a)+\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}=\frac{15a^2}{2}x-6\sqrt{3}a^3. \tag{19}$$

(18), (19)에 의하여

$$h_1(x)=h_2(x)\Leftrightarrow\frac{15a^2}{2}x-6\sqrt{3}a^3=-\frac{3a^2}{2}x\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

이므로 점 B의 좌표는

$$\mathrm{B}\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3},-\sqrt{3}a^3\right). \tag{20}$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점이 O(0,0), $\mathrm{A}\left(\sqrt{3}a,\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}\right)$이므로

$$S_1(a)=\int_0^{\sqrt{3}a}\left\{\frac{3a^2}{2}x-\left(x^3-\frac{3a^2}{2}x\right)\right\}dx=\frac{9a^4}{4}. \tag{21}$$

점 B의 x좌표가 $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$이므로

$$\begin{aligned}S_2(a)=&\int_0^{\frac{2\sqrt{3}a}{3}}\left\{\left(x^3-\frac{3a^2}{2}x\right)-\left(-\frac{3a^2}{2}x\right)\right\}dx\\&+\int_{\frac{2\sqrt{3}a}{3}}^{\sqrt{3}a}\left\{\left(x^3-\frac{3a^2}{2}x\right)-\left(\frac{15a^2}{2}x-6\sqrt{3}a^3\right)\right\}dx,\end{aligned} \tag{22}$$

즉

$$S_2(a)=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\frac{2\sqrt{3}a}{3}}+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9a^2}{2}x^2+6\sqrt{3}a^3x\right]_{\frac{2\sqrt{3}a}{3}}^{\sqrt{3}a}=\frac{3a^4}{4}. \tag{23}$$

따라서 $S_1(a)=k\cdot S_2(a)$를 만족시키는 k의 값은 3이다.

[문제1-3]

(15) 또는 (21)에 의하여 $S_1(a)=\dfrac{9a^4}{4}$이므로 주어진 식에 대입해서 정리하면

$$\frac{9-9\sin^4\theta}{9\cos^2\theta+18\sin^2\theta}=\frac{1}{2}. \tag{24}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로, 주어진 식은

$$\frac{1-\sin^4\theta}{1+\sin^2\theta}=\frac{1}{2}. \tag{25}$$

$1-\sin^4\theta=(1-\sin^2\theta)(1+\sin^2\theta)$이므로 주어진 식은

$$1-\sin^2\theta=\frac{1}{2}. \tag{26}$$

따라서 $\sin\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이다. $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이고, 따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이다.

[덕성여자대학교 문항정보 2]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 사인법칙, 삼각형의 넓이, 등비수열, 수열의 귀납적 정의, 로그의 성질
예상 소요 시간	총 90분 중 45분 예상	

2. 문항 및 제시문

[문2]

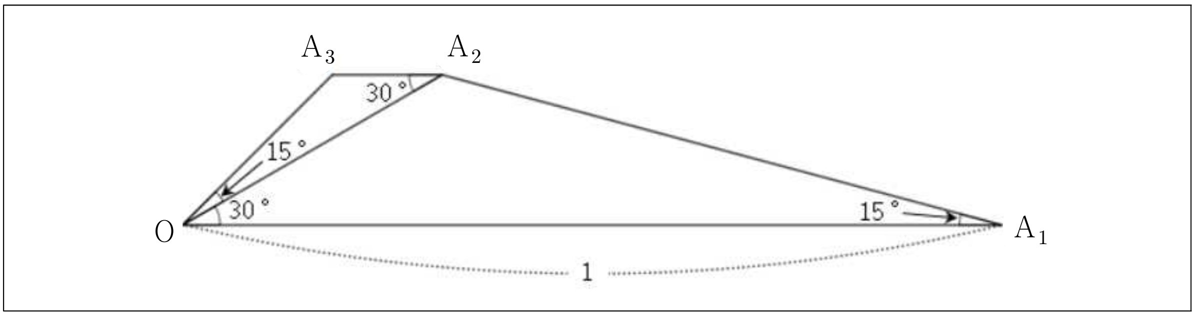
그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA_1}}=1$, $\angle \mathrm{A_1OA_2}=30^\circ$, $\angle \mathrm{OA_1A_2}=15^\circ$인 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$가 있다. 점 $\mathrm{A_3}$은 다음 조건 (가), (나)를 만족시킨다.

(가) $\angle \mathrm{A_2OA_3}=15^\circ$, $\angle \mathrm{OA_2A_3}=30^\circ$.
(나) 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$와 삼각형 $\mathrm{OA_2A_3}$은 선분 $\mathrm{OA_2}$를 제외하고 겹치지 않는다.

모든 자연수 n에 대하여 점 A_n은 다음 조건 (다), (라)를 만족시킨다.

(다) $\angle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{OA}_{n+2}=\angle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$, $\angle \mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}=\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1}$.
(라) 삼각형 $\mathrm{OA}_n A_{n+1}$과 삼각형 $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$는 선분 OA_{n+1}을 제외하고 겹치지 않는다.

단, $\sin 15^\circ=\frac{1}{4}$로 계산한다.



[문제 2-1]
선분 OA_2와 선분 OA_3의 길이를 각각 구하시오. [20점]

[문제 2-2]
자연수 n에 대하여 선분 OA_n의 길이를 a_n이라 하자. a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 구하여 수열 $a_1, a_3, a_5, \cdots$와 수열 $a_2, a_4, a_6, \cdots$이 등비수열임을 보이고, 두 등비수열의 첫째항과 공비를 각각 구하시오. [40점]

[문제 2-3]
자연수 n에 대하여 삼각형 OA_nA_{n+1}의 넓이를 T_n이라 하자. [문제 2-2]의 결과를 이용하여 $\sum_{n=1}^{2N} \log_2 T_n$을 구하시오. 단, N은 자연수이다. [40점]

3. 출제 의도

[문제 2-1] 사인법칙을 이용하여 주어진 두 내각들과 한 변의 길이로부터 삼각형의 다른 변의 길이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-2] 사인법칙을 이용하여 주어진 수열이 등비수열임을 보이고 첫째항과 공비를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-3] $\sum$의 성질과 로그의 성질을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
2	2-1	**[수학 I]-(2) 삼각함수-(가) 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	2-2	**[수학 I]-(3) 수열-(가) 등차수열과 등비수열** [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[수학 I]-(3) 수열-(다) 수학적 귀납법** [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
	2-3	**[수학 I]-(1) 지수함수와 로그함수-(가) 지수와 로그** [12수학 I 01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. **[수학 I]-(3) 수열-(가) 등차수열과 등비수열** [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[수학 I]-(3) 수열-(나) 수열의 합** [12수학 I 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2020	26~31, 75~107, 112~157		
	수학 I	김원경 외 14인	비상교육	2020	23~28, 76~113, 116~158		
	수학 I	류희찬 외 10인	천재교과서	2021	29~35, 84~113, 120~162		

5. 문항 해설

[문제 2-1]

삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$에 사인법칙을 적용하여 선분 $\mathrm{OA_2}$의 길이를 구한다. 이 결과와 함께 삼각형 $\mathrm{OA_2A_3}$에 사인법칙을 적용하여 선분 $\mathrm{OA_3}$의 길이를 구한다.

[문제 2-2]

제시문의 조건 (가), (나), (다), (라)로부터 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 내각들을 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 구한다. 삼각형 OA_nA_{n+1}에 사인법칙 등을 적용하여 a_n과 a_{n+1}의 관계를 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 구하고, 이를 이용하여 두 등비수열 $a_1, a_3, a_5, \cdots$와 $a_2, a_4, a_6, \cdots$의 첫째항과 공비를 각각 구한다.

[문제 2-3]

[문제 2-2]의 결과를 이용하여 T_n을 구한다. $\sum$의 성질과 로그의 성질을 이용하여 $\sum_{n=1}^{2N} \log_2 T_n$을 N으로 나타낸다.

6. 채점 기준

[문제 2-1]

[예시답안 1]

- 사인법칙을 이용하여 (1)과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

- (2)와 같이 선분 OA_2의 길이를 구한 경우: +5점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

- 사인법칙을 이용하여 (3)과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

- (4)와 같이 선분 OA_3의 길이를 구한 경우: +5점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

[예시답안 2]

- (5), (6) 등과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (7)과 같이 선분 OA_2의 길이를 구한 경우: +5점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (8), (9) 등과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (10)과 같이 선분 OA_3의 길이를 구한 경우: +5점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

[예시답안 3]
• (11) 등과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (12)와 같이 선분 OA_2의 길이를 구한 경우: +5점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (13) 등과 같은 관계를 알아낸 경우: +5점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (14)와 같이 선분 OA_3의 길이를 구한 경우: +5점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

[문제 2-2]
[예시답안 1]
• 삼각형의 각들의 관계를 파악하고 이를 이용하여 (16)과 같이 사인법칙을 적용한 경우: +15점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(8점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(15점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (17)과 같이 a_n과 a_{n+1}의 관계를 표현한 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(10점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (18)과 같이 제시문의 조건들을 이용하여 a_n과 a_{n+2}의 관계를 얻은 경우: +5점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

- (19), (20)과 같이 등비수열들의 첫째항, 공비를 구한 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(10점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

[예시답안 2]

- (22), (23), (25), (26) 등과 같이 (24), (27)을 얻기 위한 관계들을 얻은 경우: +15점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(8점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(15점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (24), (27)과 같이 a_n과 a_{n+1}의 관계를 표현한 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(10점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (28)과 같이 제시문의 조건들을 이용하여 a_n과 a_{n+2}의 관계를 얻은 경우: +5점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

- (29), (30)과 같이 등비수열들의 첫째항, 공비를 구한 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(10점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

[예시답안 3]

- (32), (34) 등과 같이 (33), (35)를 얻기 위한 관계들을 얻은 경우: +15점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(8점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(15점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

• (33), (35)와 같이 a_n과 a_{n+1}의 관계를 표현한 경우: +10점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(10점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

• (36)과 같이 제시문의 조건들을 이용하여 a_n과 a_{n+2}의 관계를 얻은 경우: +5점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−A(5점): 해당하는 결과를 얻었다.

• (37), (38)과 같이 등비수열들의 첫째항, 공비를 구한 경우: +10점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(10점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

[문제 2-3]
[예시답안 1]
• (39)와 같이 T_n을 n으로 표현한 경우: +15점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(8점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(15점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

• (40)과 같이 $\log_2 T_n$을 n으로 표현한 경우: +15점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(8점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(15점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

• (41)를 얻은 경우: +10점
−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): (41)의 첫 번째 등식에 해당하는 결과까지만 얻었다.
−A(10점): (41)의 최종 결과를 얻었다.

[예시답안 2]
• (42)와 같이 T_n을 n으로 표현한 경우: +15점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(8점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(15점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (43)과 같이 $\log_2 T_n$을 n으로 표현한 경우: +15점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(8점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(15점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (44)를 얻은 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): (44)의 첫 번째 등식에 해당하는 결과까지만 얻었다.
−A(10점): (44)의 최종 결과를 얻었다.

[예시답안 3]
- (45)와 같이 T_n을 n으로 표현한 경우: +15점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(8점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(15점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (46)과 같이 $\log_2 T_n$을 n으로 표현한 경우: +15점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(8점): n이 홀수 혹은 짝수인 경우들 중 하나만 답을 얻었다.
−A(15점): n이 홀수, 짝수인 경우들 모두 답을 얻었다.

- (47)를 얻은 경우: +10점

−E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
−B(5점): (41)의 첫 번째 등식에 해당하는 결과까지만 얻었다.
−A(10점): (41)의 최종 결과를 얻었다.

7. 예시 답안

[문제 2-1]

[예시답안 1] $\angle \mathrm{OA_2A_1} = 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ = 135^\circ$이므로, 삼각형 $\mathrm{OA_1A_2}$에 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{OA_2}}}{\sin 15^\circ} = \frac{\overline{\mathrm{OA_1}}}{\sin 135^\circ}. \tag{1}$$

$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로, (1)에 의하여

$$\overline{\mathrm{OA_2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{2}$$

삼각형 $\mathrm{OA_2A_3}$에 사인법칙을 적용하면

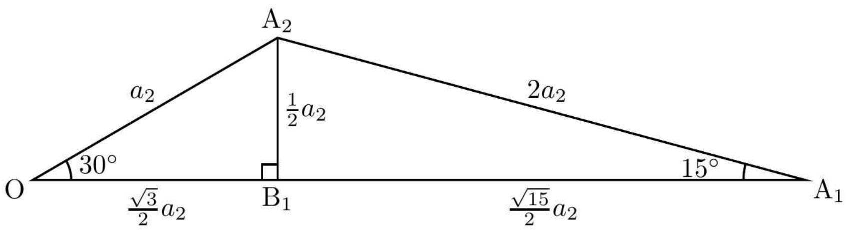
$$\frac{\overline{\mathrm{OA_3}}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{\mathrm{OA_2}}}{\sin 135^\circ} \tag{3}$$

이므로, (2)에 의하여

$$\overline{\mathrm{OA_3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}. \tag{4}$$

[예시답안 2] $a_2 = \overline{\mathrm{OA_2}}$, $a_3 = \overline{\mathrm{OA_3}}$이라 하자. <그림 1>과 같이 점 $\mathrm{A_2}$에서 선분 $\mathrm{OA_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{B_1}$이라 하면,

$$\overline{\mathrm{OB_1}} = \overline{\mathrm{OA_2}} \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a_2, \qquad \overline{\mathrm{A_2B_1}} = \overline{\mathrm{OA_2}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}a_2. \tag{5}$$



<그림 1>

$\overline{\mathrm{A_2B_1}} = \overline{\mathrm{A_1A_2}} \cdot \sin 15^\circ = \dfrac{1}{4}\overline{\mathrm{A_1A_2}}$이므로, (5)에 의하여 .

$$\overline{\mathrm{A_1A_2}} = 4 \cdot \overline{\mathrm{A_2B_1}} = 2a_2. \tag{6}$$

직각삼각형 $\mathrm{A_1A_2B_1}$에 피타고라스의 정리를 적용하면 (5), (6)에 의하여

$\overline{A_1B_1}=\sqrt{\overline{A_1A_2}^2-\overline{A_2B_1}^2}=\sqrt{(2a_2)^2-\left(\frac{a_2}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}a_2$이므로, (5)에 의하여

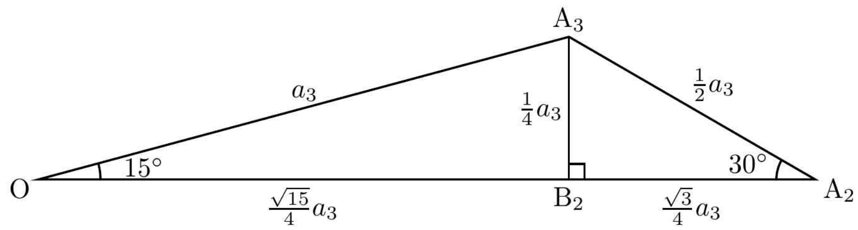
$$1=\overline{OA_1}=\overline{OB_2}+\overline{A_1B_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}a_2+\frac{\sqrt{15}}{2}a_2=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}a_2.$$

따라서

$$\overline{OA_2}=a_2=\frac{2}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}. \tag{7}$$

<그림 2>와 같이 점 A_3에서 선분 OA_2에 내린 수선의 발을 B_2라 하면,

$$\begin{aligned}\overline{OB_2}&=\overline{OA_3}\cdot\cos15^\circ=a_3\sqrt{1-\sin^2 15^\circ}=\frac{\sqrt{15}}{4}a_3,,\\ \overline{A_3B_2}&=\overline{OA_3}\cdot\sin15^\circ=\frac{1}{4}a_3.\end{aligned} \tag{8}$$



<그림 2>

$\overline{A_3B_2}=\overline{A_2A_3}\cdot\sin30^\circ=\frac{1}{2}\overline{A_2A_3}$이므로, (8)에 의하여 .

$$\overline{A_2A_3}=2\cdot\overline{A_3B_2}=\frac{1}{2}a_3. \tag{9}$$

직각삼각형 $A_2A_3B_2$에 피타고라스의 정리를 적용하면 (8), (9)에 의하여

$\overline{A_2B_2}=\sqrt{\overline{A_2A_3}^2-\overline{A_3B_2}^2}=\sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2-\left(\frac{a_3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a_3$이므로, (7), (8)에 의하여

$$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}+\overline{A_2B_2}=\frac{\sqrt{15}}{4}a_3+\frac{\sqrt{3}}{4}a_3=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}a_3,$$

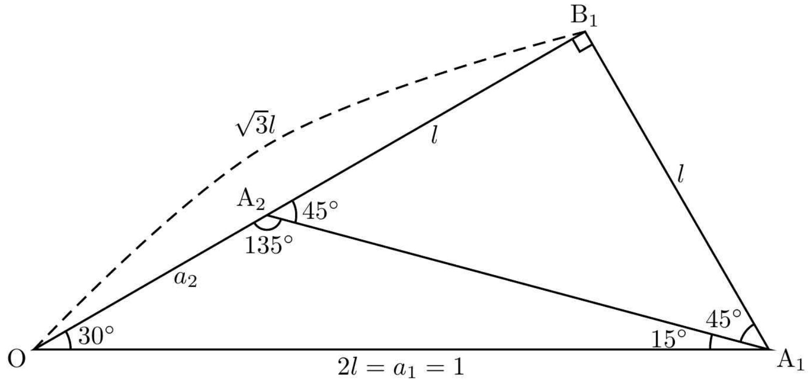
따라서

$$\overline{OA_3}=a_3=\frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}=\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18}. \tag{10}$$

[예시답안 3] $a_2=\overline{OA_2}$, $a_3=\overline{OA_3}$이라 하자. <그림 3>과 같이 점 A_1에서 직선

OA_2에 내린 수선의 발을 B_1, 선분 A_1B_1의 길이를 l이라 하면,

$$\overline{OB_1} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}\,l. \tag{11}$$



<그림 3>

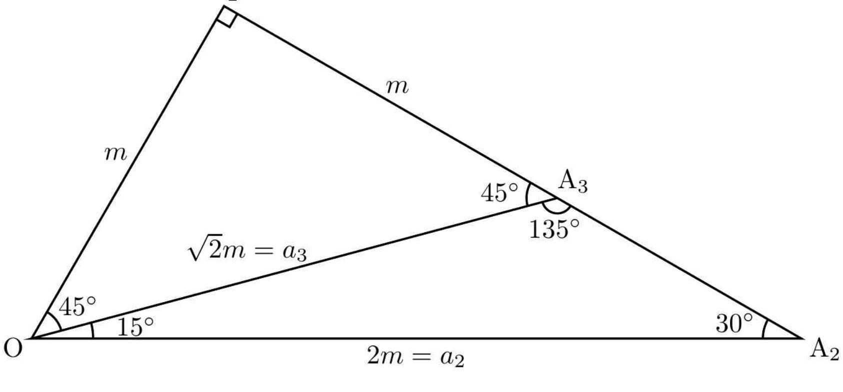
$\overline{A_2B_1} = \overline{A_1B_1} \cdot \tan 45^\circ = l$이므로 (11)에 의하여 $a_2 = \overline{OA_2} = \overline{OB_1} - \overline{A_2B_1} = (\sqrt{3}-1)l$.

$1 = \overline{OA_1} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\sin 30^\circ} = 2l$이므로 $l = \dfrac{1}{2}$. 따라서

$$a_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \tag{12}$$

<그림 4>와 같이 점 O에서 직선 A_2A_3에 내린 수선의 발을 B_2, 선분 OB_2의 길이를 m이라 하면,

$$a_3 = \overline{OA_3} = \frac{\overline{OB_2}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}\,m. \tag{13}$$



<그림 4>

$a_2 = \overline{OA_2} = \dfrac{\overline{OB_2}}{\sin 30^\circ} = 2m$이므로 (12)에 의하여 $m = \dfrac{a_2}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$. 따라서 (13)에

의하여

$$a_3 = \sqrt{2}\,m = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}. \tag{14}$$

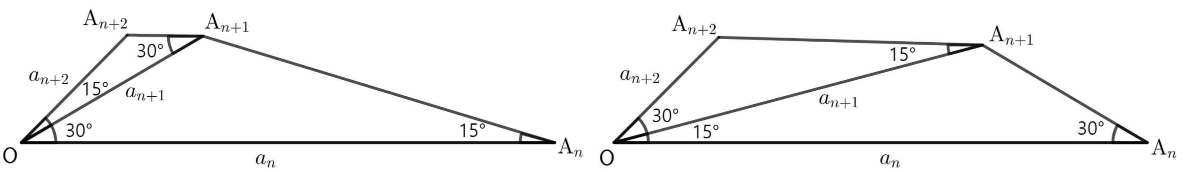
[문제 2-2]

[예시답안 1] 제시문의 조건 (다), (라)에 의하여, 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{A}_{n+2}\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+3} &= \angle \mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2} = \angle \mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1},\\ \angle \mathrm{O}\mathrm{A}_{n+2}\mathrm{A}_{n+3} &= \angle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+2} = \angle \mathrm{O}\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\end{aligned}$$

이므로, 조건 (가), (나)에 의하여 <그림 5>와 같이

$$\begin{aligned}&\angle \mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1} = 30^\circ,\ \ \angle \mathrm{O}\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = 15^\circ, \quad n: \text{홀수},\\ &\angle \mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1} = 15^\circ,\ \ \angle \mathrm{O}\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = 30^\circ, \quad n: \text{짝수}.\end{aligned} \tag{15}$$



<그림 5>

따라서 삼각형 $\mathrm{O}\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$에 사인법칙을 적용하면

$$\begin{aligned}&\frac{a_{n+1}}{\sin 15^\circ} = \frac{a_n}{\sin 135^\circ}, \quad n: \text{홀수},\\ &\frac{a_{n+1}}{\sin 30^\circ} = \frac{a_n}{\sin 135^\circ}, \quad n: \text{짝수}\end{aligned} \tag{16}$$

이므로,

$$\begin{aligned}&a_{n+1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot a_n = \frac{\sqrt{2}}{4}a_n, \quad n: \text{홀수},\\ &a_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}a_n, \quad n: \text{짝수}.\end{aligned} \tag{17}$$

(17) 의하여

$$a_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_n = \frac{1}{4} a_n, \qquad n: \text{자연수} \tag{18}$$

이고, $a_1 = \overline{\mathrm{OA}_1} = 1$이므로,

$$\text{수열 } a_1, a_3, a_5, \cdots \text{는 첫째항 1, 공비 } \frac{1}{4}\text{인 등비수열.} \tag{19}$$

(2)에 의하여 $a_2 = \overline{\mathrm{OA}_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$이므로, (17)에 의하여

$$\text{수열 } a_2, a_4, a_6, \cdots \text{는 첫째항 } \frac{\sqrt{2}}{4}\text{, 공비 } \frac{1}{4}\text{인 등비수열.} \tag{20}$$

[예시답안 2] 제시문의 조건 (다), (라)에 의하여, 자연수 n에 대하여

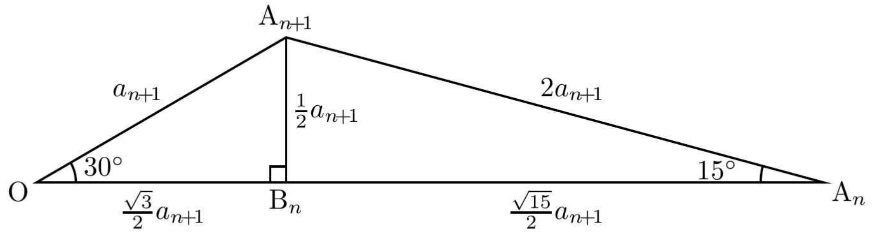
$$\angle \mathrm{A}_{n+2}\mathrm{OA}_{n+3} = \angle \mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2} = \angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1},$$
$$\angle \mathrm{OA}_{n+2}\mathrm{A}_{n+3} = \angle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{OA}_{n+2} = \angle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$$

이므로, 조건 (가), (나)에 의하여 <그림 3>과 같이

$$\begin{aligned} &\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1} = 30^\circ, \ \angle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1} = 15^\circ, \qquad n: \text{홀수}, \\ &\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1} = 15^\circ, \ \angle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1} = 30^\circ, \qquad n: \text{짝수}. \end{aligned} \tag{21}$$

n이 홀수라고 하자. <그림 6>과 같이 점 A_{n+1}에서 선분 OA_n에 내린 수선의 발을 B_n이라 하면,

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{OB}_n} &= \overline{\mathrm{OA}_{n+1}} \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a_{n+1},, \\ \overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n} &= \overline{\mathrm{OA}_{n+1}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} a_{n+1}. \end{aligned} \tag{22}$$



<그림 6> n: 홀수

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n} = \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}} \cdot \sin 15^\circ = \dfrac{1}{4}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$이므로, (22)에 의하여

$$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}} = 4 \cdot \overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n} = 2a_{n+1}. \tag{23}$$

직각삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n$에 피타고라스의 정리를 적용하면 (22), (23)에 의하여 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = \sqrt{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}^2 - \overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n}^2} = \sqrt{(2a_{n+1})^2 - \left(\frac{a_{n+1}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}a_{n+1}$이므로, (22)에 의하여

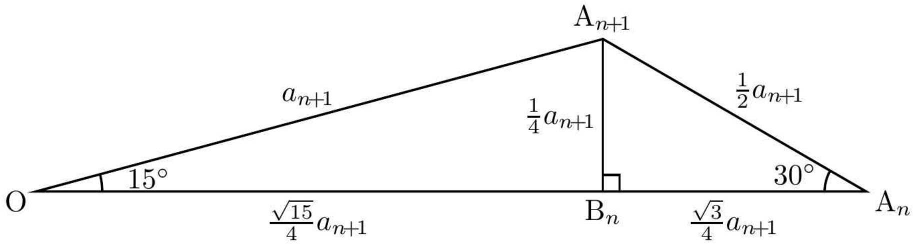
$$a_n = \overline{\mathrm{OA}_n} = \overline{\mathrm{OB}_n} + \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1} + \frac{\sqrt{15}}{2}a_{n+1} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}a_{n+1}.$$

따라서

$$a_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{15}+\sqrt{3}} \cdot a_n = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}a_n, \quad n: \text{홀수}. \tag{24}$$

n이 짝수라고 하자. <그림 7>과 같이 점 A_{n+1}에서 선분 OA_n에 내린 수선의 발을 B_n이라 하면,

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{OB}_n} &= \overline{\mathrm{OA}_{n+1}} \cdot \cos 15^\circ = a_{n+1}\sqrt{1-\sin^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{15}}{4}a_{n+1}, \\ \overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n} &= \overline{\mathrm{OA}_{n+1}} \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{4}a_{n+1}. \end{aligned} \tag{25}$$



<그림 7> n: 짝수

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n} = \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$이므로, (25)에 의하여 .

$$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}} = 2 \cdot \overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n} = \frac{1}{2}a_{n+1}. \tag{26}$$

직각삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n$에 피타고라스의 정리를 적용하면 (25), (26)에 의하여 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = \sqrt{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}^2 - \overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n}^2} = \sqrt{\left(\frac{a_{n+1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_{n+1}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a_{n+1}$이므로, (25)에 의하여

$$a_n = \overline{\mathrm{OA}_n} = \overline{\mathrm{OB}_n} + \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = \frac{\sqrt{15}}{4}a_{n+1} + \frac{\sqrt{3}}{4}a_{n+1} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}a_{n+1},$$

따라서

$$a_{n+1}=\frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}\cdot a_n=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}a_n,\quad n:\text{짝수}. \tag{27}$$

(24), (27)에 의하여

$$a_{n+2}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\cdot a_n=\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18}a_n,\quad n:\text{자연수} \tag{28}$$

이고, $a_1=\overline{\mathrm{OA}_1}=1$이므로,

수열 $a_1, a_3, a_5, \cdots$는 첫째항 1, 공비 $\dfrac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18}$인 등비수열. (29)

(7)에 의하여 $a_2=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$이므로, (28)에 의하여

수열 $a_2, a_4, a_6, \cdots$는 첫째항 $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$, 공비 $\dfrac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18}$인 등비수열. (30)

[예시답안 3] 제시문의 조건 (다), (라)에 의하여, 자연수 n에 대하여

$$\angle \mathrm{A}_{n+2}\mathrm{OA}_{n+3}=\angle \mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}=\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1},$$
$$\angle \mathrm{OA}_{n+2}\mathrm{A}_{n+3}=\angle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{OA}_{n+2}=\angle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$$

이므로, 조건 (가), (나)에 의하여 <그림 3>과 같이

$$\begin{aligned}&\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1}=30^\circ,\ \angle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}=15^\circ,\quad n:\text{홀수},\\&\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1}=15^\circ,\ \angle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}=30^\circ,\quad n:\text{짝수}.\end{aligned} \tag{31}$$

n이 홀수라고 하자. <그림 8>과 같이 점 A_n에서 직선 OA_{n+1}에 내린 수선의 발을 B_n, 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l이라 하면,

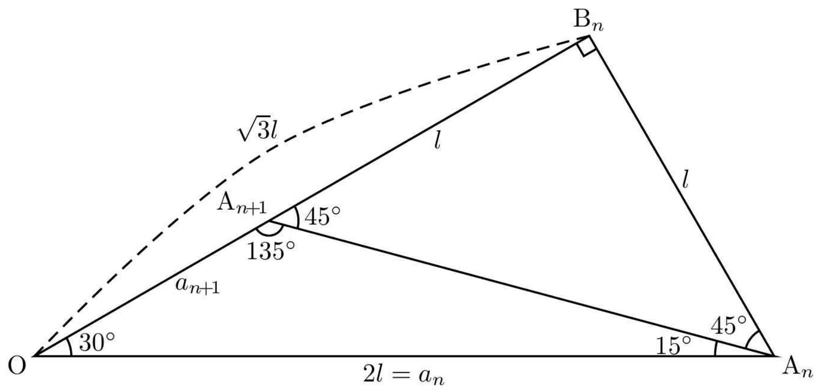
$$\overline{\mathrm{OB}_n}=\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}\,l. \tag{32}$$

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\cdot\tan 45^\circ=l$이므로 (32)에 의하여

$a_{n+1}=\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OB}_n}-\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n}=(\sqrt{3}-1)l$. $a_n=\overline{\mathrm{OA}_n}=\dfrac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{\sin 30^\circ}=2l$이므로 $l=\dfrac{a_n}{2}$.

따라서

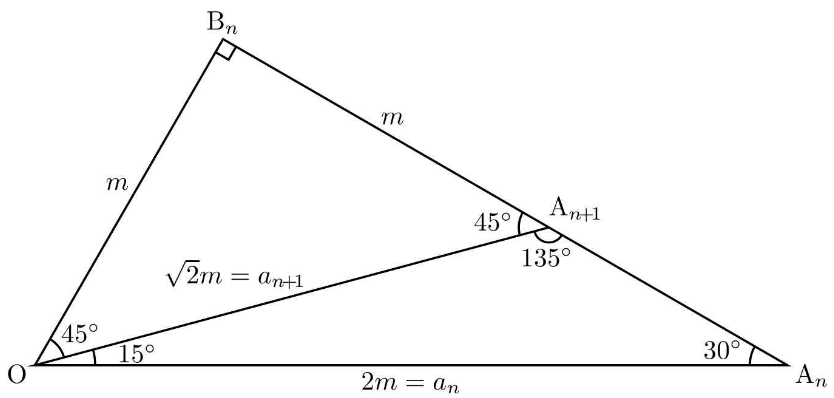
$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a_n,\quad n:\text{홀수}. \tag{33}$$



<그림 8> n: 홀수

n이 짝수라고 하자. <그림 9>와 같이 점 O에서 직선 A_nA_{n+1}에 내린 수선의 발을 B_n, 선분 OB_n의 길이를 m이라 하면,

$$a_{n+1} = \overline{OA_{n+1}} = \frac{\overline{OB_n}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}\,m. \tag{34}$$



<그림 9> n: 짝수

$a_n = \overline{OA_n} = \dfrac{\overline{OB_n}}{\sin 30^\circ} = 2m$이므로 $m = \dfrac{a_n}{2}$. 따라서 (34)에 의하여

$$a_{n+1} = \sqrt{2}\,m = \frac{\sqrt{2}}{2}a_n, \qquad n: \text{짝수}. \tag{35}$$

(33), (35)에 의하여

$$a_{n+2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_n = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}a_n, \qquad n: \text{자연수} \tag{36}$$

이고, $a_1 = \overline{OA_1} = 1$이므로,

$$\text{수열 } a_1, a_3, a_5, \cdots \text{는 첫째항 1, 공비 } \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \text{인 등비수열.} \tag{37}$$

(12)에 의하여 $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ 이므로, (36)에 의하여

$$\text{수열 } a_2, a_4, a_6, \cdots \text{는 첫째항 } \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \text{ 공비 } \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \text{인 등비수열.} \tag{38}$$

[문제 2-3]

[예시답안 1] 자연수 n에 대하여 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이 T_n은

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{OA}_n} \cdot \overline{\mathrm{OA}_{n+1}} \cdot \sin(\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1}) = \frac{1}{2} a_n \cdot a_{n+1} \cdot \sin(\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1})$$

이므로, (15), (17)에 의하여

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} a_n \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16} a_n^2, && n: \text{홀수}, \\ T_n &= \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a_n \cdot \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{4} a_n^2 = \frac{\sqrt{2}}{16} a_n^2, && n: \text{짝수}. \end{aligned}$$

[문제 2-2]의 결과인 (19), (20)에 의하여, 자연수 n에 대하여

$$a_{2n-1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \qquad a_{2n} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

이므로, 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned} T_{2n-1} &= \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}^2 = \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}, \\ T_{2n} &= \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}^2 = \frac{\sqrt{2}}{128} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}. \end{aligned} \tag{39}$$

(39)에 의하여 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned} \log_2 T_{2n-1} &= \log_2\left\{\frac{\sqrt{2}}{16}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\right\} = -4n + \frac{1}{2}, \\ \log_2 T_{2n} &= \log_2\left\{\frac{\sqrt{2}}{128}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\right\} = -4n - \frac{5}{2}. \end{aligned} \tag{40}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2N} \log_2 T_n &= \sum_{n=1}^{N} \log_2 T_{2n-1} + \sum_{n=1}^{N} \log_2 T_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(-4n + \frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{N} \left(-4n - \frac{5}{2}\right) = \sum_{n=1}^{N} (-8n - 2) \\ &= -8 \cdot \frac{1}{2} N(N+1) - 2N = -4N^2 - 6N, \qquad N: \text{자연수}. \end{aligned} \tag{41}$$

[예시답안 2]
자연수 n에 대하여 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이 T_n은

$$T_n=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}_n}\cdot\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}\cdot\sin(\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1})=\frac{1}{2}a_n\cdot a_{n+1}\cdot\sin(\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1})$$

이므로, (21), (24), (27)에 의하여

$$\begin{aligned}T_n&=\frac{1}{2}\cdot a_n\cdot\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}a_n\cdot\sin30^\circ=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{24}a_n^2, &&n:\text{홀수},\\ T_n&=\frac{1}{2}\cdot a_n\cdot\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}a_n\cdot\sin15^\circ=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{24}a_n^2, &&n:\text{짝수}.\end{aligned}$$

[문제 2-2]의 결과인 (29), (30)에 의하여, 자연수 n에 대하여

$$a_{2n-1}=1\cdot\left\{\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18}\right\}^{n-1},\quad a_{2n}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}\cdot\left\{\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18}\right\}^{n-1}$$

이므로, 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}T_{2n-1}&=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{24}\cdot\left[\left\{\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18}\right\}^{n-1}\right]^2=\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^{4n-3}}{2^{2n+1}3^{4n-3}},\\ T_{2n}&=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{24}\left[\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}\left\{\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{18}\right\}^{n-1}\right]^2\\ &=\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^{4n-1}}{2^{2n+3}3^{4n-1}}.\end{aligned}\tag{42}$$

(42)에 의하여 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}&\log_2T_{2n-1}=\log_2\left\{\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^{4n-3}}{2^{2n+1}3^{4n-3}}\right\}\\ &=(4n-3)\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3})-(2n+1)-(4n-3)\log_2 3\\ &=\{4\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3})-4\log_2 3-2\}n-\{3\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3})-3\log_2 3+1\}\\ &=\left(4\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}-2\right)n-\left(3\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}+1\right),\\ &\log_2T_{2n}=\log_2\left\{\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^{4n-1}}{2^{2n+3}3^{4n-1}}\right\}\\ &=(4n-1)\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3})-(2n+3)-(4n-1)\log_2 3\\ &=\{4\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3})-4\log_2 3-2\}n-\{\log_2(\sqrt{15}-\sqrt{3})-\log_2 3+3\}\\ &=\left(4\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}-2\right)n-\left(\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}+3\right).\end{aligned}\tag{43}$$

따라서

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{2N}\log_2 T_n = \sum_{n=1}^{N}\log_2 T_{2n-1} + \sum_{n=1}^{N}\log_2 T_{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\left\{\left(4\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}-2\right)n-\left(3\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}+1\right)\right\} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N}\left\{\left(4\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}-2\right)n-\left(\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}+3\right)\right\} \\
&= 2\cdot\left(4\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}-2\right)\cdot\frac{1}{2}N(N+1)-\left(4\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}+4\right)N \\
&= \left(4\log_2\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}-2\right)N^2-6N, \qquad N: \text{자연수}.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

[예시답안 3] 자연수 n에 대하여 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이 T_n은

$$
T_n = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}_n}\cdot\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}\cdot\sin(\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1}) = \frac{1}{2}a_n\cdot a_{n+1}\cdot\sin(\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1})
$$

이므로, (31), (33), (35)에 의하여

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{2}\cdot a_n\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}a_n\cdot\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{8}a_n^2, &\quad n: \text{홀수}, \\
T_n &= \frac{1}{2}\cdot a_n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a_n\cdot\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16}a_n^2, &\quad n: \text{짝수}.
\end{aligned}
$$

[문제 2-2]의 결과인 (37), (38)에 의하여, 자연수 n에 대하여

$$
a_{2n-1} = 1\cdot\left\{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\right\}^{n-1},\quad a_{2n} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\left\{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\right\}^{n-1}
$$

이므로, 자연수 n에 대하여

$$
\begin{aligned}
T_{2n-1} &= \frac{\sqrt{3}-1}{8}\left[\left\{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\right\}^{n-1}\right]^2 = \frac{2^{n-1}(\sqrt{3}-1)^{2n-1}}{2^{4n-1}}, \\
T_{2n} &= \frac{\sqrt{2}}{16}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\right\}^{n-1}\right]^2 = \frac{2^{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}-1)^{2n}}{2^{4n+2}}.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

(45)에 의하여 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}\log_2 T_{2n-1} &= \log_2\left\{\frac{(\sqrt{3}-1)^{2n-1}}{2^{3n}}\right\} = (2n-1)\log_2(\sqrt{3}-1) - 3n \\ &= \{2\log_2(\sqrt{3}-1)-3\}n - \log_2(\sqrt{3}-1), \\ \log_2 T_{2n} &= \log_2\left\{\frac{(\sqrt{3}-1)^{2n}}{2^{3n+\frac{5}{2}}}\right\} = 2n\log_2(\sqrt{3}-1) - \left(3n+\frac{5}{2}\right) \\ &= \{2\log_2(\sqrt{3}-1)-3\}n - \frac{5}{2}.\end{aligned} \tag{46}$$

따라서

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{2N}\log_2 T = \sum_{n=1}^{N}\log_2 T_{2n-1} + \sum_{n=1}^{N}\log_2 T_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left[\{2\log_2(\sqrt{3}-1)-3\}n - \log_2(\sqrt{3}-1)\right] + \sum_{n=1}^{N}\left[\{2\log_2(\sqrt{3}-1)-3\}n - \frac{5}{2}\right] \\ &= 2\cdot\{2\log_2(\sqrt{3}-1)-3\}\cdot\frac{1}{2}N(N+1) - \left\{\log_2(\sqrt{3}-1)+\frac{5}{2}\right\}N \\ &= \{2\log_2(\sqrt{3}-1)-3\}N^2 + \left\{\log_2(\sqrt{3}-1)-\frac{11}{2}\right\}N, \qquad N:\text{자연수}.\end{aligned} \tag{47}$$