

2024학년도 경찰대학 1차 시험

- 수학 -



응시자 유의사항

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.

경 찰 대 학

<http://www.police.ac.kr>

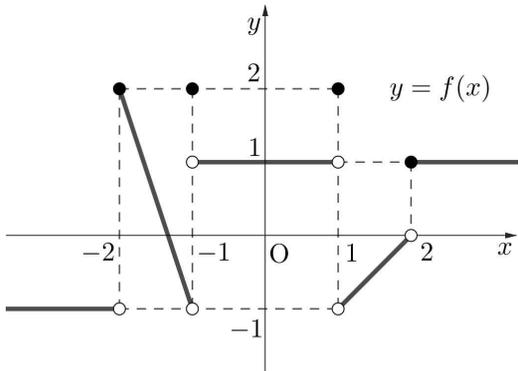
※ 총 8쪽 25문항(3점 5문항, 4점 15문항, 5점 5문항)입니다.
[1~20] 각 문항의 답을 하나만 고르시오.

1. 부등식 $(\log_{\frac{1}{2}} x - 2) \log_{\frac{1}{4}} x < 4$ 를 만족시키는 자연수 x 의 개수는?

[3점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(-2 - \frac{1}{x+1}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

3. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. 함수 $y = \tan \frac{3\pi}{2}x - \sin 2\pi x$ 의 주기는 2이다.

ㄴ. 함수 $y = 2\pi + \cos 2\pi x \sin \frac{4\pi}{3}x$ 의 주기는 3이다.

ㄷ. 함수 $y = \sin \pi x - \left| \cos \frac{3\pi}{2}x \right|$ 의 주기는 2이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int x f'(x) dx = x^3 + 3x^2 + C$ (단, C 는 적분상수)

(나) $g(x) = \int_{-1}^x t f(t) dt$

$g'(2) = 0$ 일 때, $f(-2)$ 의 값은? [3점]

- ① -30 ② -24 ③ -18 ④ -12 ⑤ -6

5. 두 실수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a^3 - 2b$ 의 값은?
[4점]

(가) b 는 $-\sqrt{8}a$ 의 제곱근이다.
(나) $\sqrt[3]{a^2}b$ 는 -16 의 세제곱근이다.

- ① $-2-2\sqrt{2}$ ② -2 ③ $4-2\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2+2\sqrt{2}$

6. $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{x^2}{12} + \frac{x}{2} + a$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 근이 $b, 2b (b > 0)$ 일 때, $\int_b^{2b} \{g(x) - f(x)\} dx$ 의 값은?
(단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

7. 3θ 는 제1사분면의 각이고 4θ 는 제2사분면의 각일 때, θ 는 제 m 사분면 또는 제 n 사분면의 각이다. $m+n$ 의 값은?
(단, $m \neq n$) [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

8. 모든 항이 음수인 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\frac{1}{2} \left(a_n - \frac{2}{a_n} \right) = \sqrt{n-1} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{99} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① -20 ② $-10-3\sqrt{11}$ ③ $-10-7\sqrt{2}$
④ $-9-3\sqrt{11}$ ⑤ $-9-7\sqrt{2}$

9. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)+f(-x)=1$ 이다.

(나) $x^2-x-2 \neq 0$ 일 때, $g(x) = \frac{2f(x)-7}{x^2-x-2}$ 이다.

방정식 $f(x) = k$ 가 반드시 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수는? [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

10. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-2) & (x < 2) \\ 4(x-2) & (x \geq 2) \end{cases}$$

와 실수 t 에 대하여 함수 $g(t)$ 를

$$g(t) = \int_{t-1}^{t+2} |f(x)| dx$$

라 하자. $g(t)$ 가 $t=a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

11. 두 실수 a ($a > 0$), b 에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 $x(t)$ 가

$$x(t) = t^3 - 6at^2 + 9a^2t + b$$

일 때, $x(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P가 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간의 위치의 차는 32이다.

(나) 점 P가 출발한 후 점 P의 가속도가 0이 되는 순간의 위치는 36이다.

$b-a$ 의 값은? [4점]

- ① 18 ② 23 ③ 28 ④ 33 ⑤ 38

12. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x-5} & (x \neq 5) \\ 7 & (x = 5) \end{cases}$$

에 대하여 두 함수 $g(x), h(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4-f(x)} & (x < 1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}, h(x) = |f(x)|^2 + a - 11$$

이라 하자. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 함수 $g(x)h(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① -34 ② -36 ③ -38 ④ -40 ⑤ -42

13. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} & \cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 \\ \text{(나)} & 2\sqrt{2} \cos A + 2 \cos B + \sqrt{2} \cos C = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

- ① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

14. 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$ 와 $f(x)$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{F(x) - x^2\}\{f(x) - 2x\}}{x^5} = 3 \\ \text{(나)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 2 \\ \text{(다)} & f(0)F(0) = 4 \end{aligned}$$

곡선 $y = F(x) - f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

15. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} & a_2 = \pi \\ \text{(나)} & 7a_n - 5a_{n+1} > 0 \quad (n \geq 1) \\ \text{(다)} & 2\sin^2\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + 1 = 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

$\frac{(a_4)^5}{(a_6)^3}$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 9 ③ 16 ④ 25 ⑤ 36

16. $0 \leq x \leq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$2ax^3 - 3(a+1)x^2 + 6x \leq 1$$

이 성립할 때, 양수 a 의 최솟값은? [4점]

- ① $\frac{11+\sqrt{5}}{6}$ ② $\frac{5+\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
 ④ $\frac{4+2\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{7+5\sqrt{5}}{6}$

17. 두 실수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b+c+d$ 의 값은? [5점]

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(a-b)x^2 + ax - x}) = c$ (c 는 상수)
 (나) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax - b - \sqrt{-(b+1)x^2 - 4x}) = d$ (d 는 상수)

- ① $-\frac{5}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{7}{2}$ ④ -4 ⑤ $-\frac{9}{2}$

18. 모든 자연수 n 에 대하여 세 점 $(n-1, 1), (n, 0), (n, 1)$ 을

꼭짓점으로 하는 삼각형을 T_n , 직선 $y = \frac{x}{n}$ 가 직선 $y=1$ 과

만나는 점을 A_n , 점 A_n 에서 x 축에 내린 수선의 발을 B_n

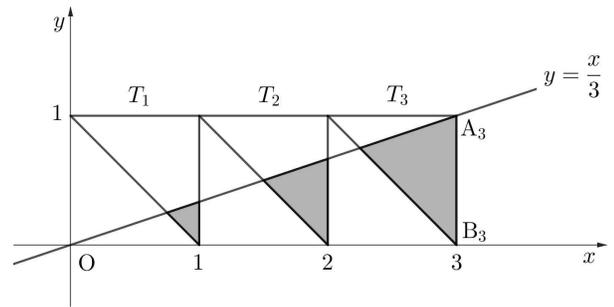
이라 할 때, 삼각형 T_1, T_2, \dots, T_n 의 내부와 삼각형

OA_nB_n 의 내부의 공통부분의 넓이를 a_n 이라 하자. 예를

들어, 그림과 같이 a_3 은 세 삼각형 T_1, T_2, T_3 의 내부와

삼각형 OA_3B_3 의 내부의 공통부분의 넓이를 나타내고

$a_3 = \frac{7}{12}$ 이다. a_{50} 의 값은? (단, O는 원점이다.) [5점]



- ① $\frac{49}{6}$ ② $\frac{101}{12}$ ③ $\frac{26}{3}$ ④ $\frac{107}{12}$ ⑤ $\frac{55}{6}$

19. 실수 $t (2 < t < 8)$ 에 대하여 이차함수 $f(x) = (x-2)^2$ 위의 점 $P(t, f(t))$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q 라 하자. 직선 $y = 2(t-2)(x-5)$ 위의 한 점 R 를 $\overline{PR} = \overline{QR}$ 가 되도록 잡는다. 삼각형 PQR 의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{S(t)}{(t-2)^2}$ 의 값은? [5점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

20. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 함수

$$f(x) = 2\cos^2 x - |1 + 2\sin x| - 2|\sin x| + 2$$

에 대하여 집합

$$A = \{x \mid f(x) \text{의 값은 } 0 \text{ 이하의 정수}\}$$

라 하자. 집합 A 의 원소의 개수는? [5점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[21~25] 각 문항의 답을 답안지에 기재하시오.

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여
함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 1) \\ -f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고
 $x = -1$ 에서 극값을 가질 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값을 구하시오.

[3점]

22. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값을
구하시오. [4점]

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $2f(x) - (x+2)f'(x) - 8 = 0$ 이다.
(나) x 의 값이 -3 에서 0 까지 변할 때, 함수 $f(x)$ 의
평균변화율은 3 이다.

23. 방정식 $3^x + 3^{-x} - 2(\sqrt{3^x} + \sqrt{3^{-x}}) - |k-2| + 7 = 0$ 이 실근을
갖지 않도록 하는 정수 k 의 개수를 구하시오. [4점]

24. 수열 $\{a_n\}$ 과 공차가 2인 등차수열 $\{b_n\}$ 이

$$n(n+1)b_n = \sum_{k=1}^n (n-k+1)a_k \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. $a_5 = 58$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하시오. [4점]

25. 두 함수

$$y = 4^x, \quad y = \frac{1}{2^a} \times 4^x - a$$

의 그래프와 두 직선

$$y = -2x - \log b, \quad y = -2x + \log c$$

로 둘러싸인 도형의 넓이가 3이 되도록 하는

자연수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오.

[5점]

※ 확인사항

▷ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입·표기했는지 확인하시오.