

2024학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가
수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ⑤ 02. ③ 03. ② 04. ① 05. ⑤
 06. ③ 07. ④ 08. ④ 09. ③ 10. ③
 11. ⑤ 12. ① 13. ③ 14. ② 15. ④
 16. 6 17. 24 18. 5 19. 4
 20. 98 21. 19 22. 10

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & 3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}} \\ &= 3^{(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})} \\ &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & f(x) = 2x^2 - x \text{에서} \\ & f'(x) = 4x - 1 \\ & \text{이므로} \\ & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = f'(1) = 3 \end{aligned}$$

정답 ③

3. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{6}}{3} \text{이고 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{이므로} \\ \sin \theta &= -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

정답 ②

4. 출제의도 : 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \text{함수 } y = f(x) \text{의 그래프에서} \\ & \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \\ & \text{이므로} \\ & \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2 + 0 = -2 \end{aligned}$$

정답 ①

5. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $a > 0, r > 0$ 이다.

$$\frac{a_3 a_8}{a_6} = 12 \text{ 에서 } \frac{ar^2 \times ar^7}{ar^5} = 12, ar^4 = 12$$

$$\text{즉, } a_5 = 12$$

$$a_5 + a_7 = 36 \text{ 에서 } a_7 = 24 \text{ 이므로}$$

$$r^2 = \frac{a_7}{a_5} = \frac{24}{12} = 2$$

$$\frac{a_{11}}{a_7} = r^4 = (r^2)^2 = 2^2 = 4 \text{ 이므로}$$

$$a_{11} = a_7 \times 4 = 24 \times 4 = 96$$

정답 ⑤

6. 출제의도 : 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

이고, 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대, $x = 3$ 에서 극소이므로

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2ax + b &= 3(x+1)(x-3) \\ &= 3x^2 - 6x - 9 \end{aligned}$$

따라서 $a = -3, b = -9$ 이고

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$$

정답 ③

7. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3a + 2b = \log_3 32, ab = \log_9 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} &= \frac{3a + 2b}{6ab} \\ &= \frac{\log_3 32}{6 \times \log_9 2} \\ &= \frac{\log_3 2^5}{6 \times \log_3 2} \\ &= \frac{5 \log_3 2}{3 \log_3 2} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

정답 ④

8. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 6x^2 - 2f(1)x \text{ 에서}$$

$$f(x) = 2x^3 - f(1)x^2 + C \text{ (} C \text{ 는 적분상수)}$$

라 하면 $f(0) = 4$ 이므로

$$C = 4$$

$$\text{즉, } f(x) = 2x^3 - f(1)x^2 + 4$$

이 식에 $x = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 - f(1) + 4$$

$$f(1) = 3$$

따라서

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$$

이므로

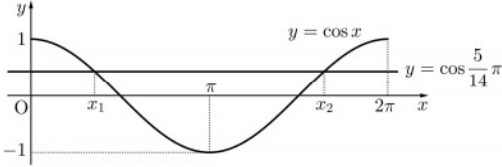
$$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 4 = 8$$

정답 ④

9. 출제의도 : 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin \frac{\pi}{7} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} \right) = \cos \frac{5}{14} \pi$$



그림과 같이 곡선 $y = \cos x (0 \leq x \leq 2\pi)$

와 직선 $y = \cos \frac{5}{14} \pi$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 라 하면

$$x_1 = \frac{5}{14} \pi \text{이고 } \frac{x_1 + x_2}{2} = \pi \text{이므로}$$

$$x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{23}{14} \pi$$

따라서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 부등식

$\cos x \leq \sin \frac{\pi}{7}$ 을 만족시키는 모든 x 의

값의 범위는 $\frac{5}{14} \pi \leq x \leq \frac{23}{14} \pi$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{23}{14} \pi - \frac{5}{14} \pi = \frac{9}{7} \pi$$

정답 ③

10. 출제의도 : 삼차함수 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의

접선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$f(x) - 3 = (x - a)(x - 2)^2$$

$$f(x) = (x - a)(x - 2)^2 + 3 \text{ (단, } a \text{는 상수)}$$

이때

$$f'(x) = (x - 2)^2 + 2(x - a)(x - 2)$$

이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의 점

$(-2, f(-2))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$$

이 접선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$3 - f(-2) = f'(-2)(1 + 2)$$

$$3 - f(-2) = 3f'(-2)$$

$$3 - \{16(-2 - a) + 3\} = 3\{16 - 8(-2 - a)\}$$

$$3 - (-29 - 16a) = 3(32 + 8a)$$

$$32 + 16a = 96 + 24a, \quad 8a = -64$$

즉, $a = -8$ 이므로

$$f(x) = (x + 8)(x - 2)^2 + 3$$

따라서

$$f(0) = 8(-2)^2 + 3 = 35$$

정답 ③

11. 출제의도 : 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P가 점 A(1)에서 출발하고 속도가 $v_1(t) = 3t^2 + 4t - 7$ 이므로 시각 t 에서의 위치를 $s_1(t)$ 라 하면

$$s_1(t) = 1 + \int_0^t (3t^2 + 4t - 7) dt$$

$$= t^3 + 2t^2 - 7t + 1 \text{ -----㉠}$$

또, 점 Q가 점 B(8)에서 출발하고 속도가 $v_2(t) = 2t + 4$ 이므로 시각 t 에서의 위치를 $s_2(t)$ 라 하면

$$s_2(t) = 8 + \int_0^t (2t + 4) dt$$

$$= t^2 + 4t + 8 \text{ -----㉡}$$

이때, 두 점 P, Q사이의 거리가 4가 되는 시각은

$$|s_1(t) - s_2(t)| = 4$$

㉠, ㉡에서

$$|(t^3 + 2t^2 - 7t + 1) - (t^2 + 4t + 8)| = 4$$

$$|t^3 + t^2 - 11t - 7| = 4$$

그러므로

$$t^3 + t^2 - 11t - 7 = 4 \text{ 또는}$$

$$t^3 + t^2 - 11t - 7 = -4$$

즉,

$$t^3 + t^2 - 11t - 11 = 0 \text{ 또는}$$

$$t^3 + t^2 - 11t - 3 = 0$$

(i) $t^3 + t^2 - 11t - 11 = 0$ 일 때,

$$t^2(t+1) - 11(t+1) = 0$$

$$(t+1)(t^2 - 11) = 0$$

$t > 0$ 이므로

$$t = \sqrt{11}$$

(ii) $t^3 + t^2 - 11t - 3 = 0$ 일 때,

좌변을 인수분해하면

$$(t-3)(t^2 + 4t + 1) = 0$$

$t > 0$ 이므로

$$t = 3$$

(i), (ii)에 의하여 두 점 P, Q의 사이의 거리가 처음으로 4가 되는 시각은

$$t = 3$$

한편,

$$v_1(t) = 3t^2 + 4t - 7$$

$$= (3t+7)(t-1)$$

이므로

$$0 \leq t < 1 \text{ 일 때, } v_1(t) < 0$$

$$t \geq 1 \text{ 일 때, } v_1(t) \geq 0$$

따라서 점 P가 시각 $t=0$ 에서 시각 $t=3$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_1(t)| dt$$

$$= -\int_0^1 v_1(t) dt + \int_1^3 v_1(t) dt$$

$$= -\int_0^1 (3t^2 + 4t - 7) dt + \int_1^3 (3t^2 + 4t - 7) dt$$

$$= -[t^3 + 2t^2 - 7t]_0^1 + [t^3 + 2t^2 - 7t]_1^3$$

$$= -(-4) + 28$$

$$= 32$$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 k 에 대하여

(i) $a_1 = 4k$ 일 때,

a_1 은 짝수이므로

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$$

a_2 도 짝수이므로

$$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

⊖ k 가 홀수인 경우

$$a_4 = a_3 + 1 = k + 1$$

이때

$$a_2 + a_4 = 2k + (k + 1) = 3k + 1$$

이므로

$$3k + 1 = 40$$

에서 $k = 13$ 이고,

$$a_1 = 4k = 4 \times 13 = 52$$

⊕ k 가 짝수인 경우

$$a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{k}{2}$$

이때

$$a_2 + a_4 = 2k + \frac{k}{2} = \frac{5}{2}k$$

이므로

$$\frac{5}{2}k = 40$$

에서 $k = 16$ 이고,

$$a_1 = 4k = 4 \times 16 = 64$$

(ii) $a_1 = 4k - 1$ 일 때,
 a_1 은 홀수이므로
 $a_2 = a_1 + 1 = 4k$
 a_2 는 짝수이므로
 $a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$
 a_3 도 짝수이므로
 $a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{2k}{2} = k$
 이때
 $a_2 + a_4 = 4k + k = 5k$
 이므로
 $5k = 40$
 에서 $k = 8$ 이고,
 $a_1 = 4k - 1 = 4 \times 8 - 1 = 31$

(iii) $a_1 = 4k - 2$ 일 때,
 a_1 은 짝수이므로
 $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{4k - 2}{2} = 2k - 1$
 a_2 는 홀수이므로
 $a_3 = a_2 + 1 = (2k - 1) + 1 = 2k$
 a_3 은 짝수이므로
 $a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{2k}{2} = k$
 이때
 $a_2 + a_4 = (2k - 1) + k = 3k - 1$
 이므로
 $3k - 1 = 40$
 에서 $k = \frac{41}{3}$ 이고, 이것은 조건을
 만족시키지 않는다.

(iv) $a_1 = 4k - 3$ 일 때,
 a_1 은 홀수이므로
 $a_2 = a_1 + 1 = (4k - 3) + 1 = 4k - 2$
 a_2 는 짝수이므로

$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{4k - 2}{2} = 2k - 1$
 a_3 은 홀수이므로
 $a_4 = a_3 + 1 = (2k - 1) + 1 = 2k$
 이때
 $a_2 + a_4 = (4k - 2) + 2k = 6k - 2$
 이므로
 $6k - 2 = 40$
 에서 $k = 7$ 이고,
 $a_1 = 4k - 3 = 4 \times 7 - 3 = 25$

(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는
 모든 a_1 의 값의 합은
 $52 + 64 + 31 + 25 = 172$

정답 ①

13. 출제의도 : 도함수를 활용하여 함수
 가 주어진 증가, 감소에 대한 조건을 만
 족시키도록 하는 미지수의 값을 구할 수
 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 - ax^2 - bx & (x < 0) \\ \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - bx & (x \geq 0) \end{cases}$$

에서

$$f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - b & (x < 0) \\ x^2 + 2ax - b & (x > 0) \end{cases}$$

이다.

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 의 좌우에서 감소하
 다가 증가하고, 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에
 서 미분가능하므로

$$f'(-1) = 0$$

$$-1 + 2a - b = 0, \quad b = 2a - 1$$

$x < 0$ 일 때

$$f'(x) = -x^2 - 2ax - 2a + 1$$

$$= -(x+1)(x+2a-1)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=-2a+1$ 이다. 이때 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, -1]$ 에서 감소하고, 구간 $[-1, 0]$ 에서 증가하므로 $(-\infty, -1)$ 에서 $f'(x) \leq 0$, $(-1, 0)$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉, $f'(-2a+1)=0$ 에서 $-2a+1 \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{그러므로 } a \leq \frac{1}{2} \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, $x > 0$ 일 때

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 + 2ax - b \\ &= x^2 + 2ax - 2a + 1 \\ &= (x+a)^2 - a^2 - 2a + 1 \end{aligned}$$

이고 함수 $f(x)$ 가 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가하므로 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

(i) $-a < 0$, 즉 $a > 0$ 인 경우
 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이려면
 $f'(0) = -2a + 1 \geq 0$ 이면 된다.

$$\text{그러므로 } 0 < a \leq \frac{1}{2}$$

(ii) $-a \geq 0$, 즉 $a \leq 0$ 인 경우
 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이려면
 $f'(-a) = -a^2 - 2a + 1 \geq 0$ 이면 된다.

$$a^2 + 2a - 1 \leq 0,$$

$$-1 - \sqrt{2} \leq a \leq -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{그러므로 } -1 - \sqrt{2} \leq a \leq 0$$

(i), (ii)에서

$$-1 - \sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2} \dots\dots \textcircled{8}$$

즉, $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서 구하는 a 의 값의 범위는

$$-1 - \sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2} \text{이므로 } a+b=3a-1 \text{의}$$

값의 최댓값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때 $\frac{1}{2}$, 최솟값

은 $a = -1 - \sqrt{2}$ 일 때 $-4 - 3\sqrt{2}$ 이다.
 따라서

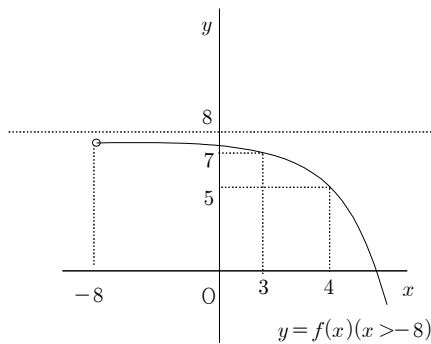
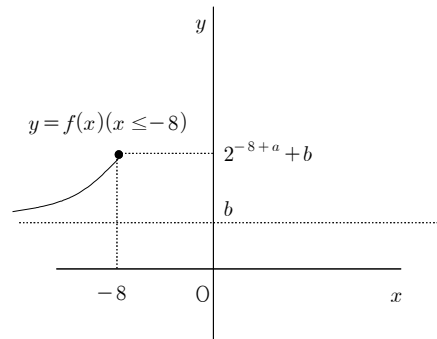
$$M-m = \frac{1}{2} - (-4 - 3\sqrt{2}) = \frac{9}{2} + 3\sqrt{2}$$

정답 ③

14. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 지수함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \leq -8$ 과 $x > -8$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 각각 그림과 같다.



또한 주어진 조건에서 $3 \leq k < 4$ 이므로 $x > -8$ 인 경우에 정수 $f(x)$ 는

$$f(x) = 6 \text{ 또는 } f(x) = 7$$

이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x \leq -8$ 인 경우에 정수 $f(x)$ 는 6뿐이어야 한다.

즉 $b=5$ 이고 $6 \leq f(-8) < 7$ 이어야 하므로

$$6 \leq 2^{-8+a} + 5 < 7$$

$$1 \leq 2^{-8+a} < 2$$

$$0 \leq -8+a < 1, \quad 8 \leq a < 9$$

이때 a 는 자연수이므로 $a=8$

$$\text{따라서 } a+b=8+5=13$$

정답 ②

15. 출제의도 : 함수의 극한과 연속을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) - 1 \quad \text{----} \ominus$$

이므로 $x=3$ 일 때, $f(3)$ 의 값에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $f(3) \neq 0$ 일 때,

$x=3$ 에 가까운 x 의 값에 대하여 $f(x) \neq 0$ 이므로

$$g(x) = \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$$

이때 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x)+1$ 은 연속이다.

그러므로 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3)$$

이 식을 \ominus 에 대입하면 만족하지 않는다.

(ii) $f(3) = 0$ 일 때,

함수 $f(x)$ 가 삼차함수이므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

그러므로 $x=3$ 에 가까우며 $x \neq 3$ 인 x 의 값에 대하여

$$f(x) \neq 0$$

이때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} \quad \text{----} \ominus \end{aligned}$$

위에서 $x \rightarrow 3$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x+3)\{f(x)+1\} = 0$$

$$f(6)\{f(3)+1\} = 0$$

$$f(6) = 0$$

그러므로

$$f(x) = (x-3)(x-6)(x-k)$$

(k 는 상수)

이 식을 \ominus 에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-k)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}$$

$$= \frac{3(6-k)}{-3(3-k)}$$

$$= \frac{6-k}{k-3}$$

이 값을 \ominus 에 대입하면 $g(3) = 3$ 이므로

$$\frac{6-k}{k-3} = 3 - 1$$

$$6 - k = 2k - 6$$

$$3k = 12$$

$$k = 4$$

따라서,

$$f(x) = (x-3)(x-4)(x-6)$$

이고 $f(5) \neq 0$ 이므로

$$g(5) = \frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 2 \times \{2 \times 1 \times (-1) + 1\}}{2 \times 1 \times (-1)}$$

$$= 20$$

16. 출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

로그의 진수 조건에 의하여

$$x-1 > 0 \text{에서 } x > 1 \quad \dots\dots\text{㉠}$$

$$13+2x > 0 \text{에서 } x > -\frac{13}{2} \quad \dots\dots\text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $x > 1$

$$\log_2(x-1) = \log_4(13+2x)$$

에서

$$\log_2(x-1) = \frac{1}{2}\log_2(13+2x)$$

$$2\log_2(x-1) = \log_2(13+2x)$$

$$\log_2(x-1)^2 = \log_2(13+2x)$$

$$(x-1)^2 = 13+2x$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0$$

$$x > 1 \text{이므로 } x = 6$$

정답 6

17. 출제의도 : 합의 기호 \sum 의 성질을 이해하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) &= \sum_{k=1}^{10} \{(2a_k - b_k) - a_k\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k) - \sum_{k=1}^{10} a_k \\ &= 34 - 10 \\ &= 24 \end{aligned}$$

18. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = (x^2+1)(x^2+ax+3) \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x(x^2+ax+3) + (x^2+1)(2x+a)$$

이므로

$$f'(1) = 2(a+4) + 2(a+2)$$

$$= 4a + 12 = 32$$

$$\text{따라서 } a = 5$$

정답 5

19. 출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

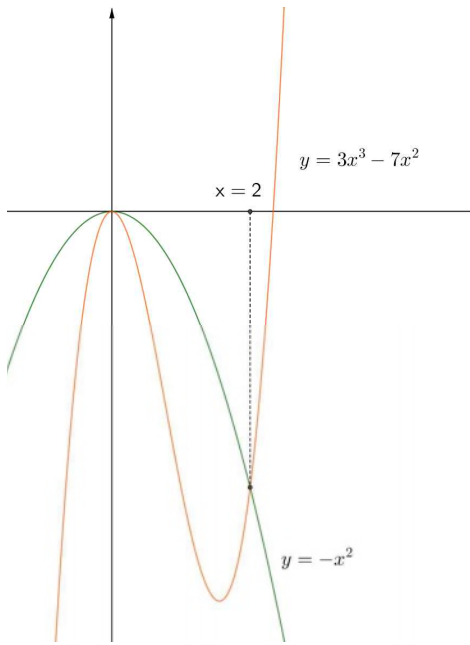
두 곡선 $y = 3x^3 - 7x^2$, $y = -x^2$ 이 만나는 점의 x 좌표는

$$3x^3 - 7x^2 = -x^2$$

$$3x^2(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

이때, 두 함수 $y = 3x^3 - 7x^2$, $y = -x^2$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{(-x^2) - (3x^3 - 7x^2)\} dx \\ &= \int_0^2 (-3x^3 + 6x^2) dx \\ &= \left[-\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 \right]_0^2 \\ &= (-12 + 16) - 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 4

20. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \frac{3}{4}\pi} = 2R_1, \quad \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R_1$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{BD}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2R_2, \quad \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R_2$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \overline{BD}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= 2^2 + 1 - \boxed{(-2)} \\ &= 7 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} R_1 \times R_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{BD} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \times \overline{BD} \right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} \times \overline{BD}^2 \\ &= \boxed{\frac{7\sqrt{6}}{6}} \end{aligned}$$

이다.

따라서 $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $q = -2$, $r = \frac{7\sqrt{6}}{6}$ 이므로

로

$$\begin{aligned} 9 \times (p \times q \times r)^2 &= 9 \times \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2) \times \frac{7\sqrt{6}}{6} \right\}^2 \\ &= 9 \times \frac{98}{9} \\ &= 98 \end{aligned}$$

정답 98

21. 출제의도 : 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 자연수이므로 a 는 자연수이고 d 는 0 이상의 정수이다.

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 S_k &= \sum_{k=1}^7 \left\{ \frac{d}{2}k^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)k \right\} \\ &= \frac{d}{2} \times \sum_{k=1}^7 k^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right) \times \sum_{k=1}^7 k \\ &= \frac{d}{2} \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + \left(a - \frac{d}{2}\right) \times \frac{7 \times 8}{2} \\ &= 70d + 28\left(a - \frac{d}{2}\right) \\ &= 28a + 56d \end{aligned}$$

$$28a + 56d = 644 \text{ 에서}$$

$$a + 2d = 23 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

a_7 이 13의 배수이므로 자연수 m 에 대하여

$$a + 6d = 13m \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} - \textcircled{B} \text{에서 } 4d = 13m - 23$$

$$4d + 23 + 13 = 13m + 13$$

$$4(d + 9) = 13(m + 1)$$

$$d + 9 = \frac{13(m + 1)}{4}$$

이 값이 자연수가 되어야 하므로 $m + 1$ 의 값은 4의 배수이어야 한다. 즉, m 이 될 수 있는 값은

3, 7, 11, 15, ...

한편, $d = \frac{13m - 23}{4}$ 이므로 \textcircled{A} 에서

$$a = 13m - 6d$$

$$= 13m - 6 \times \left(\frac{13m - 23}{4} \right)$$

$$= 13m - \frac{39}{2}m + \frac{69}{2}$$

$$= -\frac{13}{2}m + \frac{69}{2}$$

이고 이 값이 양수이어야 하므로

$$-\frac{13}{2}m + \frac{69}{2} > 0, \quad m < \frac{69}{13}$$

따라서 $m = 3$ 이고 이때 $d = 4$ 이므로

$$a = 23 - 2d = 15$$

이고

$$a_2 = a + d = 15 + 4 = 19$$

정답 19

22. 출제의도 : 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 $x = 1$ 을 대입하면

$$0 = f(1) - 3$$

이므로

$$f(1) = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

조건 (가)의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 4x$$

이고, $f(x)$ 는 다항함수이므로

$$f'(x) = 4$$

즉,

$$f(x) = 4x + C_1 \quad (C_1 \text{은 적분상수})$$

로 놓을 수 있다. 이때 \textcircled{A} 에서

$$f(1) = 3$$

이므로

$$f(1) = 4 + C_1 = 3$$

$$C_1 = -1$$

즉, $f(x) = 4x - 1$ 이므로

$$F(x) = 2x^2 - x + C_2 \quad (C_2 \text{는 적분상수})$$

한편, 조건 (나)에서

$$f(x)G(x) + F(x)g(x) = \{F(x)G(x)\}'$$

이므로 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C_3 \quad (C_3 \text{은 적분 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이때 $F(x) = 2x^2 - x + C_2$ 이고 $G(x)$ 도 다항함수이므로 $G(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$$G(x) = x^2 + ax + b \quad (\text{단, } a, b \text{는 상수})$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} (2x^2 - x + C_2)(x^2 + ax + b) \\ = 2x^4 + x^3 + x + C_3 \end{aligned}$$

양변의 x^3 의 계수를 비교하면

$$2a - 1 = 1$$

즉, $a = 1$ 이므로

$$G(x) = x^2 + x + b$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_1^3 g(x)dx &= \left[G(x) \right]_1^3 \\ &= G(3) - G(1) \\ &= (3^2 + 3 + b) - (1^2 + 1 + b) \\ &= 10 \end{aligned}$$

정답 10

■ [선택: 확률과 통계]

23. ① 24. ③ 25. ③ 26. ② 27. ④
28. ⑤ 29. 62 30. 336

23. 출제의도 : 이항분포의 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이항분포 $B\left(30, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르는 확률변수 X 의 평균은

$$E(X) = 30 \times \frac{1}{5} = 6$$

정답 ①

24. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 도로망에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{2!}{1! \times 1!} = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 2 = 8$$

정답 ③

25. 출제의도 : 두 사건의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A, B^C 이 서로 배반사건이므로 $A \subset B$

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = \frac{7}{10} - P(A)$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{2}$$

따라서 $A \subset B$ 이므로

$$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3}{10}$$

정답 ③

26. 출제의도 : 표준정규분포표를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시험 점수를 확률변수 X 라 하면

X 는 정규분포 $N(68, 10^2)$ 을 따르고

$Z = \frac{X-68}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서

$$P(55 \leq X \leq 78)$$

$$= P\left(\frac{55-68}{10} \leq Z \leq \frac{78-68}{10}\right)$$

$$= P(-1.3 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(-1.3 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.3) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4032 + 0.3413$$

$$= 0.7445$$

정답 ②

27. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

X 에서 Y 로의 일대일함수 f 의 개수는

$${}_7P_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

(i) 함수 f 의 치역에 4가 포함되고 6이 포함되지 않는 경우

함숫값이 4인 정의역의 원소를 정하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

함숫값이 2, 4가 아닌 경우, 함숫값이 홀수이어야 하므로

나머지 두 함숫값을 정하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

즉, 이 경우의 확률은

$$\frac{3 \times 12}{7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{3}{70}$$

(ii) 함수 f 의 치역에 6이 포함되고 4가 포함되지 않는 경우

(i)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$$\frac{3 \times 12}{7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{3}{70}$$

(iii) 함수 f 의 치역에 4와 6이 모두 포함되는 경우

함숫값이 4, 6인 정의역의 원소와 함숫값을 정하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$$

함숫값이 2, 4, 6이 아닌 경우, 함숫값이 홀수이어야 하므로

나머지 함숫값을 정하는 경우의 수는 4

즉, 이 경우의 확률은

$$\frac{6 \times 4}{7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{35}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{70} + \frac{3}{70} + \frac{1}{35} = \frac{4}{35}$$

정답 ④

28. 출제의도 : 주어진 시행과 표본평균의 의미를 이해하고 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은 $\frac{2}{3}$

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은 $\frac{1}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 3일 확률은 $\frac{1}{6}$

첫 번째 시행에서 기록한 수를 X_1 , 두 번째 시행에서 기록한 수를 X_2 라 하면 구하는 확률은 $X_1 + X_2 = 4$ 일 확률이다.

(i) $(X_1, X_2) = (1, 3)$ 인 경우

첫 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{81}$$

첫 번째 시행에서 3의 배수가 아닌 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{27}$$

이 경우의 확률은

$$\frac{2}{81} + \frac{1}{27} = \frac{5}{81}$$

(ii) $(X_1, X_2) = (3, 1)$ 인 경우

(i)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$$\frac{2}{81} + \frac{1}{27} = \frac{5}{81}$$

(iii) $(X_1, X_2) = (2, 2)$ 인 경우

① 주머니 A에서만 공을 꺼내는 경우
이 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$$

② 주머니 B에서만 공을 꺼내는 경우
이 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{81}$$

③ 주머니 A와 주머니 B에서 한 번씩 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$$2 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{81}$$

이 경우의 확률은

$$\frac{1}{81} + \frac{4}{81} + \frac{4}{81} = \frac{1}{9}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{81} + \frac{5}{81} + \frac{1}{9} = \frac{19}{81}$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가

2일 확률은 $\frac{1}{4}$

앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률은

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

문자 B가 보이도록 카드가 놓이려면 뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다.

따라서

구하는 확률은 5번의 시행 중 앞면이 나온 횟수가 2인 횟수가 1 또는 3 또는 5인 확률이므로

$$\begin{aligned} p &= {}_5C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^4 + {}_5C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + {}_5C_5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ &= \frac{405 + 90 + 1}{4^5} \\ &= \frac{31}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } 128 \times p &= 128 \times \frac{31}{64} \\ &= 62 \end{aligned}$$

정답 62

30. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$a \times d$ 가 홀수이므로 a 와 d 는 모두 홀수이고, $b+c$ 가 짝수이므로 b 와 c 가 모두 홀수이거나 b 와 c 가 모두 짝수이다.

(i) b 와 c 가 모두 홀수인 경우

a, b, c, d 가 모두 13 이하의 홀수이다. 13 이하의 홀수의 개수는 7이고, 조건 (가)에서 $a \leq b \leq c \leq d$ 이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 서로 다른 7개

에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수 ${}_7H_4$ 와 같다.

$${}_7H_4 = {}_{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

(ii) b 와 c 가 모두 짝수인 경우

a 와 d 가 모두 홀수, b 와 c 가 모두 짝수, $a \leq b \leq c \leq d$ 이므로 $d-a$ 의 값은 12 이하의 자연수이다.

① $d-a=12$ 인 경우 순서쌍 (a, d) 의 개수는 1, 순서쌍 (b, c) 의 개수는 서로 다른 짝수 6개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_6H_2$ 이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$1 \times {}_6H_2 = 1 \times {}_7C_2 = 1 \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

② $d-a=10$ 인 경우 순서쌍 (a, d) 의 개수는 2이고, 순서쌍 (b, c) 의 개수는 서로 다른 짝수 5개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_5H_2$ 이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$2 \times {}_5H_2 = 2 \times {}_6C_2 = 2 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 30$$

③ $d-a=8$ 인 경우 순서쌍 (a, d) 의 개수는 3이고, 순서쌍 (b, c) 의 개수는 서로 다른 짝수 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4H_2$ 이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$3 \times {}_4H_2 = 3 \times {}_5C_2 = 3 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 30$$

④ $d-a=6$ 인 경우 순서쌍 (a, d) 의 개수는 4이고, 순서쌍 (b, c) 의 개수는 서로 다른 짝수 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_3H_2$ 이므로 구하는 순서쌍

의 개수는

$$4 \times {}_3H_2 = 4 \times {}_4C_2 = 4 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 24$$

⑤ $d-a=4$ 인 경우 순서쌍 (a, d) 의 개수는 5이고, 순서쌍 (b, c) 의 개수는 서로 다른 짝수 2개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_2H_2$ 이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$5 \times {}_2H_2 = 5 \times {}_3C_2 = 5 \times \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 15$$

⑥ $d-a=2$ 인 경우 순서쌍 (a, d) 의 개수는 6이고, 순서쌍 (b, c) 의 개수는 $a+1=b=c$ 에서 1이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$6 \times 1 = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$$210 + 21 + 30 + 30 + 24 + 15 + 6 = 336$$

정답 336

[다른 풀이]

(ii) b 와 c 가 모두 짝수인 경우 홀수 a, d 와 짝수 b, c 에 대하여

$$1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 13$$

이므로

$$a = a', \quad b - a = b', \quad c - b = c', \quad d - c = d', \quad 14 - d = e'$$

이라 하면

a', b', d', e' 은 홀수이고, c' 은 0 또는 짝수이다.

$$a' + b' + c' + d' + e' = 14$$

음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d'', e'' 에 대하여

$$a' = 2a'' + 1, \quad b' = 2b'' + 1, \quad c' = 2c'', \quad d' = 2d'' + 1, \quad e' = 2e'' + 1$$

이라 하면

$$a'' + b'' + c'' + d'' + e'' = 5$$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_5H_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

■ [선택: 미적분]

23. ④ 24. ② 25. ② 26. ⑤ 27. ①
28. ② 29. 18 30. 32

23. 출제의도 : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{e^{2x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{7x} - 1}{7x} \times \frac{2x}{e^{2x} - 1} \times \frac{7}{2} \right) \\ &= \frac{7}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{7x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{2x} - 1} \\ &= \frac{7}{2} \times 1 \times 1 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

정답 ④

24. 출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2\sin t \cos t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin t \cos t}{1 - 2\sin 2t} \dots \textcircled{A}$$

(단, $1 - 2\sin 2t \neq 0$)

ⓐ의 우변에 $t = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{2\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}}{1 - 2\sin \frac{\pi}{2}} &= \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - 2 \times 1} \\ &= \frac{1}{1 - 2} = -1 \end{aligned}$$

정답 ②

25. 출제의도 : 치환적분법을 이용하여

정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} &\int_1^e \left(1 + \frac{1}{x} \right) f(x) dx \\ &= \int_1^e f'(x) f(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \{f(x)\}^2 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2} \{f(e)\}^2 - \frac{1}{2} \{f(1)\}^2 \\ &= \frac{1}{2} (e+1)^2 - \frac{1}{2} (1+0)^2 \\ &= \frac{e^2}{2} + e \end{aligned}$$

정답 ②

26. 출제의도 : 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d > 0$)이라 하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

이때

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + 1 - d$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (dn + 1 - d) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$$

㉠에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{d} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{d} (1 - 0)$$

$$= \frac{1}{d}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n \right) = 2 \text{에서}$$

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n = c_n \text{이라 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2$$

$$b_n = c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \text{이므로 급수의 성질에}$$

의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{1}{d} \dots \text{㉡}$$

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 등

비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$-1 < r < 1$ 이고 $a_2 b_2 = (1+d)r = 1$ 에서

$$r = \frac{1}{1+d}$$

이때 $d > 0$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+d}} = \frac{1+d}{d} \dots \text{㉢}$$

이므로 ㉡, ㉢에서

$$2 - \frac{1}{d} = \frac{1+d}{d},$$

$$\frac{2d-1}{d} = \frac{1+d}{d}$$

$$d = 2$$

㉡ 또는 ㉢에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$$

정답 ㉤

27. 출제의도 : 정적분을 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = \begin{cases} -\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -\frac{e^x - e^{-x}}{2} & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $x < 0$ 일 때

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2$$

에서

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2}$$

$$= \left| \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right| = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

이고, $x \geq 0$ 일 때

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + 0 = 1$$

따라서 $-\ln 4 \leq x \leq 1$ 에서의 곡선의 길이는

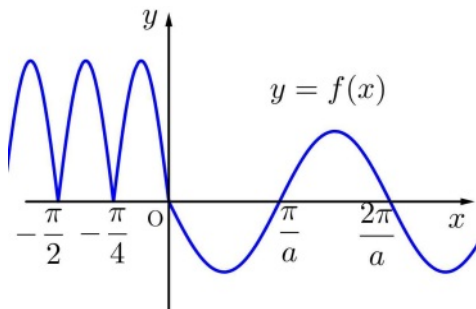
$$\begin{aligned} & \int_{-\ln 4}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_{-\ln 4}^0 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx + \int_0^1 1 dx \\ &= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_{-\ln 4}^0 + [x]_0^1 \\ &= \left(\frac{e^0 - e^0}{2} - \frac{e^{-\ln 4} - e^{\ln 4}}{2} \right) + (1 - 0) \\ &= \left(0 - \frac{1 - 4}{2} \right) + 1 \\ &= \frac{15}{8} + 1 = \frac{23}{8} \end{aligned}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 정적분과 절댓값이 포함된 함수가 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$F(x) = \int_{-a\pi}^x f(t) dt \text{라 하자.}$$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $F(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 정적분의 성질에 의하여

$$F'(x) = f(x)$$

이고,

$$g(x) = \begin{cases} -F(x) & (F(x) < 0) \\ F(x) & (F(x) \geq 0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x) = \begin{cases} -f(x) & (F(x) < 0) \\ f(x) & (F(x) > 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(x) = |F(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$F(k) = 0$ 인 실수 k 가 존재하지 않거나 $F(k) = 0$ 인 모든 실수 k 에 대하여 $F'(k) = f(k) = 0$ 이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$ 가 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 미분가능할 조건

$-a\pi < 0$ 이고 모든 음의 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이므로

$F(k) = \int_{-a\pi}^k f(t) dt = 0$ 인 음의 실수 k 의 값은 $-a\pi$ 뿐이다.

이때

$$f(k) = f(-a\pi) = 2|\sin(-4a\pi)| = 0$$

이어야 하므로 $-4a\pi = -n\pi$, 즉

$$a = \frac{n}{4} \quad (n \text{은 자연수}) \dots \textcircled{1}$$

(ii) 함수 $g(x)$ 가 구간 $[0, \infty)$ 에서 미분가능할 조건

$$\int_{-\pi/4}^0 f(t) dt = \int_{-\pi/4}^0 (-2\sin 4t) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cos 4t \right]_{-\pi/4}^0$$

$$= \frac{1}{2} \cos 0 - \frac{1}{2} \cos(-\pi)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

이고 모든 음의 실수 x 에 대하여

$f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$ 가 성립하므로 ㉠에서

$$\int_{-a\pi}^0 f(t)dt = \int_{-\frac{n}{4}\pi}^0 f(t)dt$$

$$= n \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt = n$$

따라서 양의 실수 x 에 대하여

$$F(x) = \int_{-a\pi}^x f(t)dt$$

$$= \int_{-\frac{n}{4}\pi}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt$$

$$= n + \int_0^x (-\sin at)dt$$

$$= n + \left[\frac{1}{a} \cos at \right]_0^x$$

$$= n + \left(\frac{1}{a} \cos ax - \frac{1}{a} \cos 0 \right)$$

$$= n + \frac{1}{a} \cos ax - \frac{1}{a}$$

$$= n + \frac{4}{n} \cos \frac{n}{4}x - \frac{4}{n}$$

이때 $F(k) = 0$ 인 양수 k 가 존재하면

$$n = \frac{4}{n} \left(1 - \cos \frac{n}{4}k \right)$$

에서

$$\cos \frac{n}{4}k = 1 - \frac{n^2}{4} \dots \text{㉡}$$

이때 $f(k) = -\sin ak = -\sin \frac{n}{4}k = 0$ 이어야

하므로

$$\frac{n}{4}k = m\pi \quad (m \text{은 자연수}) \text{에서}$$

㉡에서

$$\cos m\pi = 1 - \frac{n^2}{4}$$

이때 m, n 은 자연수이므로

$$\cos m\pi = 1 - \frac{n^2}{4} = -1, \quad \text{즉 } n^2 = 8 \text{을 만족}$$

시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $g(x)$ 가 구간 $[0, \infty)$ 에서 미분가능하려면 모든 양의 실수 x 에 대하여

$$F(x) = n + \frac{4}{n} \cos \frac{n}{4}x - \frac{4}{n} > 0$$

즉,

$$\cos \frac{n}{4}x > 1 - \frac{n^2}{4}$$

이어야 한다.

따라서 $1 - \frac{n^2}{4} < -1$ 이어야 하므로

$$n^2 > 8$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 3이므로 ㉠

에서 a 의 최솟값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

정답 ②

29. 출제의도 : 등비수열의 극한을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $1 < a < 3$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{3} \right)^n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1} + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a \left(\frac{a}{3} \right)^n}{3 + \left(\frac{a}{3} \right)^n}$$

$$= \frac{1 + a \times 0}{3 + 0} = \frac{1}{3} = a$$

$$a = \frac{1}{3} < 1 \text{이므로 모순이다.}$$

(ii) $a = 3$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1} + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 3^{n+1}}{3^{n+1} + 3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 = a$$

이므로 모순이다.

(iii) $a > 3$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{a}\right)^n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1} + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n + a}{3\left(\frac{3}{a}\right)^n + 1}$$

$$= \frac{0+a}{3 \times 0 + 1} = a$$

이므로 등식을 만족시킨다.

(1) $3 < a < b$ 일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$$

$$= b > 3 = \frac{9}{3} > \frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(2) $3 < b < a$ 일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$$

$$= \frac{1}{a} \neq \frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(3) $3 < a = b$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + a^{n+1}}{a^{n+1} + a^n} = 1 = \frac{9}{a}$$

에서

$$a = 9, b = 9$$

이상에서 $a = 9, b = 9$ 이므로

$$a + b = 18$$

정답 18

30. 출제의도 : 삼각함수의 미분법과 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB의 중점을 O라 하면

$$\overline{OP} = 5$$

$$\overline{OC} = \overline{AO} - \overline{AC} = 5 - 4 = 1$$

삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{OP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \times \overline{CP} \times \overline{OC} \times \cos \theta$$

$$\overline{CP} = x \text{라 하면}$$

$$5^2 = x^2 + 1^2 - 2 \times x \times 1 \times \cos \theta$$

$$x^2 - 2x \cos \theta - 24 = 0 \quad \text{.....} \textcircled{1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$x^2 - \sqrt{2}x - 24 = 0$$

$$x > 0 \text{이므로 } x = 4\sqrt{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 θ 에 대하여 미분하면

$$2x \frac{dx}{d\theta} - 2 \cos \theta \frac{dx}{d\theta} + 2x \sin \theta = 0$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{x \sin \theta}{\cos \theta - x}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{일 때, } \frac{dx}{d\theta} \text{의 값은}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{4\sqrt{2} \times \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} - 4\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

선분 PQ의 중심을 M이라 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{CM}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2x \sin \theta \times x \cos \theta$$

$$= x^2 \sin \theta \cos \theta$$

이 식의 양변을 θ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta}$$
$$= 2x \frac{dx}{d\theta} \sin \theta \cos \theta + x^2 \cos^2 \theta - x^2 \sin^2 \theta$$

이 식에 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$S' \left(\frac{\pi}{4} \right)$$
$$= 2 \times 4\sqrt{2} \times \left(-\frac{4\sqrt{2}}{7} \right) \times \cos \frac{\pi}{4} \times \sin \frac{\pi}{4}$$
$$+ (4\sqrt{2})^2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - (4\sqrt{2})^2 \sin^2 \frac{\pi}{4}$$
$$= -\frac{32}{7}$$

따라서 $-7 \times S' \left(\frac{\pi}{4} \right) = -7 \times \left(-\frac{32}{7} \right) = 32$

정답 32

■ [선택: 기하]

23. ④ 24. ① 25. ⑤ 26. ② 27. ③
28. ① 29. 17 30. 27

23. 출제의도 : 좌표공간의 점을 대칭이동한 점의 좌표와 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간의 점 $A(8, 6, 2)$ 를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점 B 의 좌표는 $B(8, 6, -2)$

따라서 선분 AB 의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(8-8)^2 + (6-6)^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

24. 출제의도 : 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점 $(7, 6)$ 에서

의 접선의 방정식은

$$\frac{7x}{7} - \frac{6y}{6} = 1$$

즉, $y = x - 1$

이다.

직선 $y = x - 1$ 에서

$y = 0$ 일 때,

$$0 = x - 1$$

$$x = 1$$

따라서 구하는 x 절편은

1

정답 ①

25. 출제의도 : 벡터의 성질을 이용하여 점 P 가 나타내는 도형의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A(4, 3)$ 이므로

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}|$$

이므로

$$|\overrightarrow{OP}| = 5$$

점 P 가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원이다.

따라서 점 P 가 나타내는 도형의 길이는 $2\pi \times 5 = 10\pi$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 공간도형에 공간좌표를 적용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

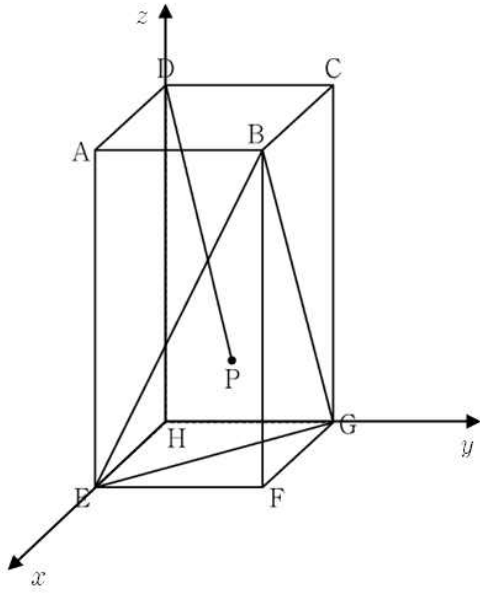
점 H 를 원점이라 하고,

반직선 HE 가 x 축의 양의 방향,

반직선 HG 가 y 축의 양의 방향,

반직선 HD 가 z 축의 양의 방향이 되도록

직육면체 $ABCD-EFGH$ 를 놓으면 그림과 같다.



$$\overline{HE} = \overline{AD} = 3,$$

$$\overline{HG} = \overline{AB} = 3,$$

$$\overline{HD} = \overline{AE} = 6$$

이므로

$$B(3, 3, 6),$$

$$E(3, 0, 0),$$

$$G(0, 3, 0)$$

이다.

삼각형 BEG의 무게중심 P의 좌표는

$$\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{3+0+3}{3}, \frac{6+0+0}{3} \right)$$

$$\text{즉, } (2, 2, 2)$$

이다.

따라서

$$D(0, 0, 6)$$

이므로

$$\overline{DP} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (2-6)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+16}$$

$$= \sqrt{24}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 포물선의 성질을 이용하여 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2 = 4px$ 에서

초점 F의 좌표는

$$(p, 0)$$

이고, 준선의 방정식은

$$x = -p$$

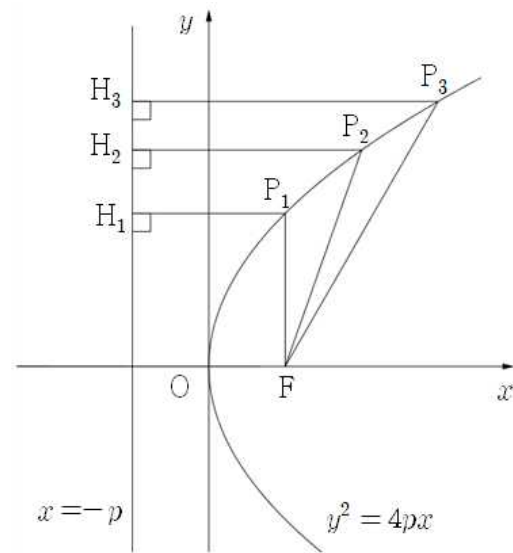
이다.

포물선 위의 세 점 P_1, P_2, P_3 에서

포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각

H_1, H_2, H_3

이라 하자.



세 점 P_1, P_2, P_3 의 x 좌표가 각각

$$p, 2p, 3p$$

이므로

포물선의 성질에 의해

$$\overline{FP_1} = \overline{H_1P_1} = p + p = 2p,$$

$$\overline{FP_2} = \overline{H_2P_2} = p + 2p = 3p,$$

$$\overline{FP_3} = \overline{H_3P_3} = p + 3p = 4p$$

이다.

$$\overline{FP_1} + \overline{FP_2} + \overline{FP_3} = 27 \text{에서}$$

$$2p + 3p + 4p = 27$$

$$9p = 27$$

따라서 $p = 3$

정답 ③

28. 출제의도 : 정사영의 성질을 이용하여 정사영시킨 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간에서 원점을 O라 하자.

점 P는 중심이 A(0, 0, 1)이고 반지름의 길이가 4인 구 위의 점이므로

$$\overline{AP} = 4$$

이다.

$$\overline{OA} \perp (xy \text{ 평면})$$

이고

점 P가 xy 평면 위에 있으므로

$$\overline{OA} \perp \overline{OP}$$

이다.

직각삼각형 AOP

$$\overline{OA} = 1$$

이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{OA}^2}$$

$$= \sqrt{4^2 - 1^2}$$

$$= \sqrt{15}$$

원점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의

발을 M이라 하면

$$\overline{PM} = \overline{QM}$$

이다.

$$\overline{OA} \perp (xy \text{ 평면}),$$

$$\overline{OM} \perp \overline{PQ}$$

이므로

삼수선의 정리에 의해

$$\overline{AM} \perp \overline{PQ}$$

이다.

점 A에서 선분 PQ까지의 거리가

2이므로

$$\overline{AM} = 2$$

이다.

직각삼각형 OAM에서

$$\overline{OM} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{OA}^2}$$

$$= \sqrt{2^2 - 1^2}$$

$$= \sqrt{3}$$

직각삼각형 OPM에서

$$\overline{PM} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OM}^2}$$

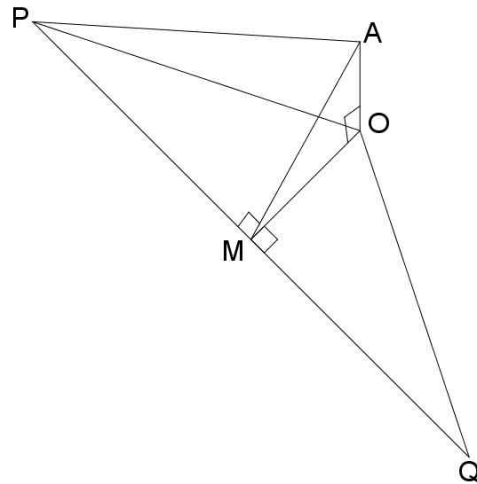
$$= \sqrt{(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

이고,

$$\overline{PQ} = 2\overline{PM} = 4\sqrt{3}$$

이다.



한편, 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T는 중심이 M이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.

구 S와 구 T가 만나서 생기는 원을 C_1 이라 하고, 원 C_1 을 포함하는 평면을 α 라 하면

$$\alpha \perp \overline{AM}$$

이다.

삼각형 OAM에서

$$\angle AMO = \theta$$

라 하면

$$\cos\theta = \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

이다.

이때, 평면 α 와 xy 평면이 이루는 예각의 크기는

$$\frac{\pi}{3}$$

이다.

점 B에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BH} \leq 2\sqrt{3}$$

이므로

삼각형 BPQ의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{BH} \\ &\leq \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \\ &= 12 \end{aligned}$$

이다.

삼각형 BPQ의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이를 S' 이라 하면

$$\begin{aligned} S' &= S \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &\leq 12 \times \frac{1}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

따라서 삼각형 BPQ의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은

6

이다.

29. 출제의도 : 타원의 성질을 이용하여 세 점 P, Q, F 사이의 관계를 파악한 후, 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 한 초점이

$F(c, 0)(c > 0)$ 이므로

타원의 성질에 의해

$$c^2 = 9 - 5 = 4$$

$c > 0$ 이므로

$$c = 2$$

이다.

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 다른 한 초점을

F' 이라 하면

$$F'(-2, 0)$$

이다.

점 P가 타원 위의 점이므로

타원의 성질에 의해

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이다.

이때,

$$\overline{PQ} - \overline{PF} \geq 6 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이므로

\textcircled{A} , \textcircled{B} 에서

$$\overline{PQ} + \overline{PF'} \geq 12 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

이다.

한편, 원의 중심을 C라 하면

$$C(2, 3)$$

이므로

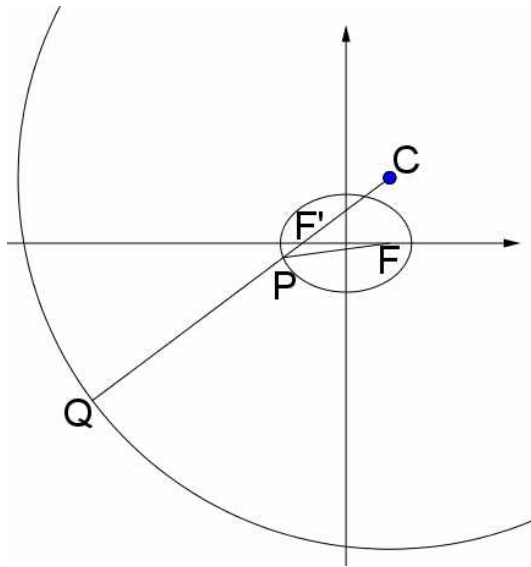
$$\overline{CF'} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-3)^2} = 5$$

이다.

이때, 주어진 조건을 만족시키는 타원

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ 과 중심이 } C(2, 3) \text{ 이고}$$

반지름의 길이가 r 인 원은 다음 그림과 같다.



⊖에서

세 점 P, Q, F'이 일직선 위에 있을 때

$|\overline{PQ}| + |\overline{PF}'|$ 의 값이 최소이고,

$|\overline{PQ}| + |\overline{PF}'|$ 의 값의 최솟값은 12이다.

따라서 $|\overline{PQ}| + |\overline{PF}'|$ 의 값이 최소일 때

원의 반지름의 길이 r 의 값은

$$r = |\overline{CF}'| + |\overline{F}'P| + |\overline{PQ}|$$

$$= 5 + 12$$

$$= 17$$

정답 17

30. 출제의도 : 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

\overline{AB} 와 \overline{PQ} 는 방향이 같다.⊙

$$9|\overline{PQ}||\overline{PQ}| = 9|\overline{PQ}|^2 \times \frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{PQ}|},$$

$$4|\overline{AB}||\overline{AB}| = 4|\overline{AB}|^2 \times \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AB}|}$$

⊙에서 $\frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AB}|}$ 이므로

$$9|\overline{PQ}|^2 = 4|\overline{AB}|^2$$

$$|\overline{PQ}| = \frac{2}{3}|\overline{AB}| \text{⊙}$$

조건 (나)에서

$$\frac{\pi}{2} < \angle CAQ < \pi$$

조건 (다)와 ⊙에서

$$\overline{PQ} \cdot \overline{CB} = |\overline{PQ}||\overline{CB}|\cos(\angle ABC)$$

$$= |\overline{PQ}||\overline{CB}|\cos \frac{\pi}{4}$$

$|\overline{CB}| = \sqrt{2}|\overline{AB}|$ 이므로

$$\overline{PQ} \cdot \overline{CB} = \left(\frac{2}{3} \times |\overline{AB}|\right) \times (\sqrt{2}|\overline{AB}|) \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{2}{3}|\overline{AB}|^2 = 24$$

$$|\overline{AB}| = 6$$

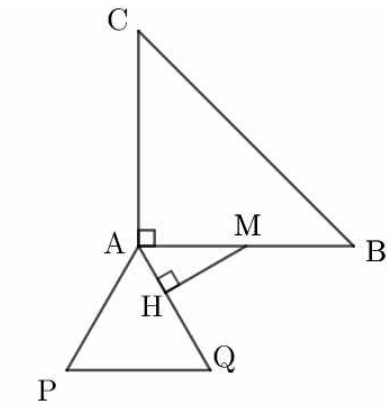
⊙에서

$$|\overline{PQ}| = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

삼각형 APQ가 정삼각형이므로

$$|\overline{AP}| = |\overline{AQ}| = 4$$

$$\angle BAQ = \frac{\pi}{3}$$



$|\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}|$ 의 최솟값은 $t = \frac{3}{2}$ 일 때,

$\sqrt{27}$ 이다.

따라서 $m = \sqrt{27}$ 이므로

$$m^2 = 27$$

선분 AB의 중점을 M, 점 M에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}| &= |2\overrightarrow{XM}| \\ &\geq 2|\overrightarrow{HM}| \\ &= 2 \times |\overrightarrow{AM}| \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

따라서 $m = 3\sqrt{3}$ 이므로

$$m^2 = 27$$

정답 27

[다른 풀이]

세 점 A, B, C의 좌표를 각각

$$A(0, 0), B(6, 0), C(0, 6)$$

이라 하면 점 P와 Q의 좌표는

$$P(-2, -2\sqrt{3}), Q(2, 2\sqrt{3})$$

점 X는 선분 AQ 위의 점이므로 X의 좌표는

$$X(t, -\sqrt{3}t) \quad (0 \leq t \leq 2)$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}| &= |(-t, \sqrt{3}t) + (6-t, \sqrt{3}t)| \\ &= |(6-2t, 2\sqrt{3}t)| \\ &= \sqrt{4t^2 - 12t + 36} \\ &= \sqrt{4\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 27} \end{aligned}$$